TECHE
UDINE

MANOSCRITTI

FONDO PRINCIPALE

Manoscritto n. P_MSS_1028_III

Nel Fondo Principale sono confluiti la maggior parte dei lasciti manoscritti pervenuti alla Biblioteca Civica «Vincenzo Joppi» nel corso del tempo: si tratta perciò di un fondo composito nel quale è possibile trovare manoscritti di argomento liturgico, scientifico, giuridico, botanico e altro.

Collocazione:

Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine
https://www.techeudine.it/fondo-principale
https://www.sbhu.it/

RICCATI
corde
elastiche
p. 2.
MS.

TOPPO

Copia
del II vol.

1028

S. Tommaso

D'Aquino.

BIBLIOTECA COMUNALE
VINCENZO JOPPI
UDINE
N. 1028
II

È questa una seconda copia del
volume II dell'Opera di J. Riccati:
Delle corde ovvero fibre elastiche,
già stampata sulla fine del 1700.

Delle Corde
Ovvero
Fibre elastiche
Schediasmi
Fisico-Matematici
Del Conte
Giordano Riccati
Nobile Trevigiano
Parte Seconda.

Prefazione.

Agli otto Schediasmi pubblicati l'anno 1768 ne aggiungo altri cinque sopra lo stesso argomento delle corde, ovvero fibre elastiche, e darò conforme il mio stile a chi legge una succinta idea de' predetti cinque Schediasmi.

IX. e X. Nell'indagare le vibrazioni della pelle del tamburo, e delle corde inegualmente grosse, che somministrano l'argomento agli Schediasmi IX. e X., seguito lo stesso metodo da me usato in riguardo alle oscillazioni delle corde ugualmente grosse, cercando prima quelle curve, a cui possono adattarsi, fornite della condizione, che le forze acceleratrici della minima fibra abbiano le proporzioni delle corrispondenti ordinate, e da esse curve deducendo poi i tempi delle vibrazioni. In sì fatta guisa si determinano i suoni tutti unici, e dirò così solitarj, che può rendere per esempio una data corda; i quali richiedono, che le mentovate forze stiano come le ordinate, e che tutti i punti della corda giungano nello stesso istante in quel sito, che occupano, quando la corda stessa sta in equilibrio, ed in quiete; ed in un altro istante parimente pervengano allo stato di quiete, impiegandovi nel passaggio da uno stato all'altro di quiete quel tempo, che esige il suono prodotto. Le predette curve le chiamo semplici; perchè accomodandosi ad esse il corpo sonoro, produce un suono solo.

Le curve composte nascono dalla

unione

unione delle semplici, e quante curve semplici entrarono nella formazione della composta, altrettanti suoni si fanno sentire congiuntamente all'orecchio. Quando si batte una corda, non ne risulta mai un suono solo; senonché il suono più grave è talmente predominante, che copre gli altri, né gli lascia discernere, salvoché con molta attenzione.

Se stimolata una corda si generano i suoni 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c., i suoi punti non si riducono in linea retta nel medesimo momento, ma si avvera bensì la condizione, che nel tempo di una vibrazione del suono 1. passano da uno stato all'altro di quiete assoluta. Si danno altresì gli stati di quiete relativa proprj dei suoni 2, 3, 4, 5, 6 &c., e l'intervallo di tempo fra due prossimi stati di quiete, benché relativa, si rende manifesto al senso, e serve per distinguere i detti suoni.

Che se i suoni, che può rendere una corda, si corrispondono in ragioni assimetre, e che almeno due se ne congiungano insieme, la corda non può mai pervenire ad uno stato di quiete assoluta. Ciò non ostante gli stati di quiete relativa confacenti ai diversi suoni servono d'appoggio all'orecchio per conoscere i suoni stessi; e conciossiaché il più grave è assai più vigoroso degli altri, se ne formerà idea distinta, ed agevolmente s'intuonerà. Di tal natura si è la corda, la cui grossezza sta inversamente come la radice

cubica

radici del quadrato-quadrato dell'assissa, delle cui vibrazioni tratterò nell'esempio III. dello Schediasma X. . . . . . .

Pensa il Dottissimo Signor Leonardo Eulero nel Tomo III. della Società Real di Torino pag. 2.., stima che la ... una corda non possa concepire vibrazioni regolari ed isocrone, se non in alcuni incontri, che dipendono dallo stato iniziale, al quale la corda è stata ridotta. Se la corda si piegherà in una di quelle curve, dalle quali un suono solo ne nasce, le sue vibrazioni saranno regolari, ed isocrone, e nel tempo conveniente al suono prodotto passerà da uno stato all'altro di quiete assoluta. Ma se la curva sarà composta da più di una curva semplice, benchè non si dia stato di quiete assoluta, esistono nulladimeno gli stati di quiete relativa, il che è sufficiente, onde si possa con verità asserire, che la corda sia capace di vibrazioni regolari, ed isocrone. Ed in fatti se con qualche artifizio riuscisse di fermare una tal corda, se ne distinguerebbero perfettamente i suoni, e specialmente il più grave, e predominante, il quale si rinvenerebbe con esattezza. Confermo evidentemente la mia asserzione coll'esempio dei cilindri sonori, dei di cui suoni l'orecchio ne forma una giusta idea, quantunque l'aggregato loro in proporzione sorda si corrisponda. Se il nostro famoso Autore si fosse accorto, che la corda può produrre una mistura di suoni, ci avrebbe veduto più addentro nella presente materia.

Non

Prefazione

Non sono capaci di vibrazioni ~~ir~~regolari, ed isocrone quelle corde, ~~che~~ mai possono accomodarsi a curve dotate della proprietà, che la forza acceleratrice sarebbe la ragione della ordinata, ~~[illegible]~~

[margin: a la cui ineguale grossezza non è diretta da una legge costante, le quali]

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

[margin: e quindi] le predette corde non possono mai vibrarsi colla legge d'un pendolo cicloide. Non si danno in esse stati di quiete nè assoluta, nè relativa comuni alla corda intera, ma una particola vi giunge prima, e l'altra dopo: inoltre sono varj gli intervalli di tempo fra due stati prossimi di quiete non solo in diverse particole, ma ancora nella particola stessa; dimodochè il suono nasce sempre incerto, nè può dall'orecchio apprezzarsi: e questa è la vera idea di que' suoni, che si chiamano falsi, la quale sino al presente non so, che sia caduta in mente a veruno.

Da una tale idea dipende la spiegazione di un curioso fenomeno, cioè per qual cagione alcuni siano forniti di orecchio musico, ed altri no. Io penso, che ciò dipenda dalla struttura del nervo uditorio, mediante la quale sia esso atto, o non atto a concepire vibrazioni regolari.

Le corde idonee ad oscillare colla legge di un pendolo cicloidale, o si adattino a curve semplici producenti un suono solo, o pure a curve composte relative ad un aggregato di più suoni, si vibrano sempre talmente equilibrate, che una particola

non

sconcertamente nel movimento delle altre. Con tale condizione si rendono note le loro vibrazioni, se non altro meccanicamente mediante l'ajuto del moto trattorio. Ma se qualcuna delle corde mentovate si accomoda ad una figura sbilanciata, segue tosto comunicazione di moto fra le particole, sinattantochè ne risulti una figura equilibrata, ed ogni punto sia fornito della conveniente velocità. Che ciò succeda, ed in brevissimo tempo, si rende manifesto dal suono giusto, che rende la corda. Darei tuttavia le ben dovute lodi a quel Geometra, che sapesse determinare il moto della corda dal primo istante di quiete sino a quel momento, in cui si riduce ad una figura equilibrata congruente colle velocità competenti. Quanto a me, non mi arrossisco di confessarmi insufficiente a tentare un così astruso problema.

Le particole della corda, che generano un suono falso, si comunicano sempre il moto, senza che possano mai formar tali curve, nè concepire tali velocità, che le forze acceleratrici cangino soltanto lo stato in quelle particole, a cui sono applicate. Da ciò dipende l'incertezza del suono, e quella insuperabile difficoltà, che si incontrerebbe, accingendosi alla impresa di rintracciare il moto di tali corde.

Si conchiuda dunque, che la unica maniera di trattare con frutto, e con verità

delle

delle vibrazioni della corda ~~sonora capace~~ di vibrarsi regolarmente, consiste nel cercare prima le curve semplici, ~~nelle~~ quali ripiegandosi producono un suono solo, e passar poi colla composizione di dette curve alla generazione di quelle, che sono relative ad un aggregato di suoni e in queste sole, e non in altra maniera si possono permanentemente vibrare le nostre corde.

Conciossiachè le curve semplici, alle quali possono accomodarsi la pelle del tamburo, e le corde triangolari, e coniche, siano espresse da equazioni differenziali, in cui non riesce di separar le variabili, vedrà il Lettore con qual artifizio per mezzo de' ~~numeri~~ col calcolo i tempi delle loro vibrazioni, cercando primieramente sì fatti tempi, quando le curve sono formate da un numero infinito di centri, e passando poi a stabilire i tempi predetti, quando il numero dei centri è finito. La similitudine fra i volumi interi, e le loro parti dei settori circolari componenti la pelle del tamburo, e delle corde triangolari, e coniche mi aprono l'adito al mentovato transito dalla legge dei tempi adattata al numero infinito dei centri, alla legge generale.

XI. Quantunque il metodo, col quale tratto delle vibrazioni sonore dei cilindri, io l'abbia preso dalli Appendice sopra le curve elastiche aggiunta dal chiarissimo Signor Leonardo Eulero alla sua famosa

Opera

~~Opera~~ Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes; nulladimeno ho presa risoluzione di non tener celato questo lavoro tra i miei manoscritti; e perchè mi sono ingegnato di spargere qualche lume sopra l'oscuro argomento, e perchè l'ho arricchito di qualche scoperta, e perchè mi è riuscito di notare alcun picciolo neo, che non mancò di segnare opportunamente, nelle sublimi meditazioni del profondissimo Autore.

Quella forza, alla quale il Signor Eulero dà il titolo di elasticità assoluta di una lamina parallelepipeda, l'asserisce senza dimostrarlo proporzionale al prodotto della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del quadrato della grossezza. Se per la strada da me calcata rispettivamente ai cilindri avessi cercato il valore della predetta forza, l'avrei trovato in ragione composta della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del cubo non del quadrato della sua grossezza. Lo sbaglio avvertito influisce nella legge dei tempi delle vibrazioni della lamina elastica stabilita dal nostro Autore, alla quale non si adattano gli esperimenti se non nella circostanza, che le lamine siano ugualmente grosse.

In riguardo ai cilindri io dimostro la mentovata forza in ragione composta dal quadrato-quadrato del diametro del cilindro che si vibra, e della rigidità della materia, della quale è formato. Questa forza per altro anzi che affermarla eguale

eguale all'elasticità del cilindro ..., di esser chiamata equipollente alla stessa elasticità, conforme dalla mia dimostrazione chiaramente raccogliesi.

Ma il principale motivo, che mi ha indotto a donare al pubblico lo Schediasma XI., si è, che il Signor Eulero omette la metà dei suoni, che può produrre una lamina, pretendendo, che un nodo, o sito di quiete non possa mai cadere alla metà della lunghezza della lamina stessa. Io ciò vedeva il contrario rispettivamente ai cilindri; e la mia dimostrazione si accomoda interamente alle lamine. L'esperienza poi favorisce i miei pensamenti; imperocchè sostenendo in bilico la lamina sopra un dito, ed indi battendola, rende un suono chiaro, che non viene punto frastornato dal dito, che la tocca in un sito immobile.

Verso il fine dello Schediasma insegno la maniera di stabilire la proporzione fra la rigidità delle materie, onde varj cilindri sono composti.

Chiudo finalmente la mia fatica col determinare la ragione fra le lunghezze, ed i diametri dei cilindri gravi ed acuti, acciocchè rendano suoni egualmente forti, e aggradevoli. Essendo di poco uso gli stromenti musici composti di cilindri, e lavorandosene in picciola quantità, non hanno potuto i Pratici colla iterata sperienza ridurli a quella perfezione, di cui sono capaci. Perciò metto sotto gli occhi di chi legga una tavola, che per lo spazio di due Ottave contenga la misura relativa delle

lunghezze

lunghezza, e dei diametri dei cilindri; ed aggiungo le osservanze necessarie per valersi di tavole con profitto.

XII. La comunicazione del moto fra due corpi si effettua senza dubbio per opera di una forza media introdotta nei corpi stessi; che accelera uno, e ritarda l'altro, o pure li accelera, o li ritarda amendue secondo la varietà delle circostanze. Maravigliosa cosa si è, che assumendo sempre date le velocità iniziali, e le masse di due corpi perfettamente molli, o elastici, ne risultino sempre le stesse due serie di velocità dal principio della comunicazione del moto sino al suo compimento, qualunque sia la natura della forza media predetta. Dipendendo pertanto essa forza media dalla rigidità, e dalla figura dei corpi, chiaramente si vede, che queste nulla influiscono nella determinazione delle velocità corrispondenti dei corpi, fra i quali segue la comunicazione del movimento. Inoltre cangiata ad arbitrio la forza media, l'aggregato dei due corpi avrà sempre perduta la stessa massima misura di forza viva, quando compiuta la comunicazione del moto colle leggi dei corpi molli, camminano essi corpi con pari velocità, ed avrà sempre ricuperata la forza viva primiera, quando sarà giunta al termine la partecipazione del moto giusto ai canoni dei corpi elastici. Si aggiunga, che si impiegheranno costantemente due tempi uguali nel transito delle velocità primitive alla media comune ai due corpi, e dalla media alle terminali.

La diversa rigidità, e figura dei

corpi

corpi cagiona gli unici effetti di aderenza. Gli spazj corsi dai corpi nello atto di partecipar si il moto, ed i tempi impiegati nel percorrerli. Per istabilire questi spazj, e questi tempi, egli è di uopo, che sia cognita l'indole, e l'energia della forza media: e perchè ciò s'ignora generalmente, m'è caduto in pensiero di supporre, che il moto si comunichi mediante una corda elastica, la di cui forza rispettivamente alle distensioni sono state da me determinate nello Schediasma I. In tale ipotesi io trovo gli spazj passati dai corpi, i tempi spesi nel passarli, e la velocità, che in ciascun istante ai corpi competono.

Seguendo le minime compressioni dei cilindri la stessa legge delle minime distensioni della corda, m'è riuscito di scoprire il tempo, in cui due cilindri della stessa materia, e forniti di basi uguali si comunicano il moto, urtando direttamente una base colle altre con velocità relativa, che sia minima in riguardo alla rigidità della materia, onde i cilindri stessi sono formati.

Colla scorta dei cilindri, e dei parallelepipedi, nei quali è conosciuta la relazione fra le compressioni, e le forze comprimenti, si può determinare il tempo, in cui urtandosi con minima velocità relativa si comunicano il moto altri corpi; e questa proposizione io la confermo con un esempio.

XIII. Concciossiachè abbia inutilmente tentato la costruzione della curva descritta

dalla

dalla ghianda di un pendolo, mettendo in computo la distensione della corda, alla quale è appesa la ghianda stessa, mi riduco a determinare nello Schediasma XIII. il massimo allungamento nella corda prodotto.

Seguirà un' Appendice allo Schediasma I., nella quale sciolgo una difficoltà acutamente proposta dal dottissimo Padre D. Girolamo Saladini. Nel citato Schediasma al numero XX. asserisco, che nelle corde la rigidità ripugnante alla distensioni è assai maggiore della tenacità, che al rompimento si oppone. Considerando il P. Saladini la rigidità come una resistenza, ne inferisce, che la corda non si potrà allungare, senon applicandole una forza maggiore della rigidità; dunque se la forza sarà minore della rigidità, e più grande della tenacità, la corda si romperà senza allungarsi, il che è un manifestissimo assurdo.

La soluzione dipende da ciò, che la rigidità naturale è una forza equilibrata da un' altra forza inviscerata nella corda, il quale equilibrio fa sì, che la corda stessa conservi la sua figura. E giacchè gli equilibrj sono rotti da qualsivoglia picciolissima forza, la corda verrà allungata da qualunque minimo peso.

Osservo, che quando da me si afferma essere la tenacità molto più picciola della rigidità naturale, intendo di parlare di quella tenacità, che unicamente si manifesta negli esperimenti, e che col mezzo

Prefazione.

Della tensione si ricava A. [illegible] fa di uopo aggiungere quella, che contrasta colla forza, la quale viene equilibrata dalla rigidità naturale. — Fintantochè la tenacità supererà la rigidità naturale ed artificiale, la corda rimarrà illesa, e solamente qualora questa sarà maggiore di quella, la corda si spezzerà.

Indice degli Schediasmi.

Schediasma IX. Delle vibrazioni del tamburo. pag. 1.

Schediasma X. Delle vibrazioni della corda inegualmente grossa. 33

Schediasma XI. Delle vibrazioni sonore dei cilindri. 95.

Schediasma XII. Della comunicazione di moto fra due corpi molli, o elastici perfettamente, e specialmente di quella, che si effettua col mezzo di una corda elastica. 193

Schediasma XIII. Determinare il massimo allungamento, che il peso di un pendolo produca nella corda, a cui è attaccato. p. 67

Appendice allo Schediasma I. p. 41.

Schediasma IX.

Delle Vibrazioni del Tamburo.

I. Il commercio di lettere, che coltivai per qualche tempo col celebre Signor Giuseppe Tartini per istabilire i veri principj dell'armonia, mi porse occasione di rintracciare da qual legge vengano regolate le vibrazioni della pelle di un tamburo. Ella è massima comunemente ricevuta, che per istabilire i tempi delle oscillazioni d'un corpo sonoro, sia prima di mestieri l'indagare la curva, alla quale oscillando si accomoda. Mi posi dunque a cercare la curva, a cui si adatta nell'atto di vibrarsi la pelle d'un tamburo, ed i calcoli mi guidarono alla formola, che sendo stata proposta agli Analisti dal Conte Jacopo Riccati mio Padre, Riccatiana suole chiamarsi. Non comparendo ad essa quelle condizioni, che sono necessarie, acciocchè si possa ottenere la separazione delle variabili, mi rivolsi al Trattato del P. Vincenzo Riccati mio fratello *De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium*, e coi metodi quivi insegnati ne tentai la costruzione adoperando una trattoria di base curvilinea, e l'avrei condotta a termine, se mi fosse riuscito di determinare col calcolo la costante, che in essa formola ha luogo. Questa difficoltà, che non potei superare, mi indusse ad abbandonare l'impresa, e forse non avrei più ad essa i miei pensieri rivolto, se uscito al pubblico il terzo Tomo dell'Accademia di Torino, non mi fosse caduta sotto degli occhi una profonda Dissertazione

del

Schediasma IX.

del rinomatissimo Signor Leonardo Eulero, il cui titolo <u>Recherches</u> <u>sur</u> <u>le</u> <u>mouvemant</u> <u>des</u> <u>cordes</u> <u>inégalemant</u> <u>grosses</u>. Conciossiachè i minimi settori circolari, che compongono la pelle del tamburo, si possano considerare come corde di grossezza variabile, l'analogia dell'argomento mi consigliò di prender nuovamente per mano il lavoro, che più anni fa aveva già tralasciato. Ottenuta una più elegante costruzione col mezzo di una trattoria di base rettilinea, urtai nel solito scoglio di non poter da essa costruzione dedurre analiticamente la determinazione della costante.

II. Fui costretto adunque di battere una nuova strada, considerando che uno dei minimi settori componenti la pelle si vibri diviso in un numero infinito di piccolissimi elementi tutti fra loro unisoni, i quali da circoli concentrici, ed immobili siano divisi. Potendo la pelle del tamburo prendere innumerabili figure fornite di uno, di due, di tre ventri, &c. il supporre il numero de' ventri infinito, egli è un caso particolare del problema, che mi sono proposto, e lo stabilimento della costante in questo caso, m'apre l'adito a determinarla generalmente. I minimi elementi, che formano il mentovato settore, sono adequatamente di figura rettangolare, ed i tempi delle loro vibrazioni accettano la legge propria delle corde ugualmente grosse, la quale si è resa nota, deducendola dalla figura, a cui si accomodano le predette corde oscillando, che ci mani-

festa

festa il comparente valore della costante.
Con tale artifizio quella legge delle vibrazioni
del tamburo, che non posso afferrare col com=
puto descrivendo le curva fornita di un
numero finito di ventri, a cui può adattar=
si la pelle del tamburo, mi si rende palese
mercé la descrizione della curva confacente
al numero dei ventri infinito, ed il proble=
ma, che era dirò così più che trascendente,
diviene di natura più mite, e si cangia
in trascendente, siccome quello, che dipen=
de dalla rettificazione del circolo.

III. Il descritto artifizio l'ho adattato
alla corda di ineguale grossezza, i cui vo=
lumi corrispondenti a qualunque assissa
sono sempre fra loro simili, e mi è riu=
scito di ridurre a computo i tempi delle
loro vibrazioni: ma questo sarà in parte
l'argomento dello Schediasma X. Con=
fesso frattanto col lodato Signor Eulero nella
citata Dissertazione alla pag. 28. che sino
al presente sono stati inutili tutti gli sfor=
zi per trovare in generale l'integrale com=
pleto della equazione, che esprime il movi=
mento d'una corda inegualmente grossa
avendo per altro scoperto una infinità di
casi, nei quali l'integrazione si ottiene,
ed il moto della corda si può per conseguen=
za determinare.

IV. Ma tornando al tamburo, darò pri=
ma, ponendo in opera il moto trattorio, la
costruzione delle curve, a cui vibrandosi
può accomodarsi la pelle del tamburo, la
quale per essere condotta alla intera perfe=
zione, richiede che si determini le tante

volte

volte nominata costante, il che ho potuto ottenere soltanto meccanicamente. Non essendomi mai riuscito di dedurne il valore analitico dalla costruzione suddetta, lo raccoglierò col mezzo dello accennato artificio, onde si possano più facilmente delineare le nostre curve, posto che siano in pronto gli organi atti a descrivere le competenti trattorie. Stabilita la costante, si renderà altresì noto col calcolo il tempo di una vibrazione della pelle, il quale si riferisca in data proporzione alla radice di essa costante.

Determinare la curva, alla quale si adatta nell' atto di vibrarsi la pelle di un tamburo.

V. Sia A'A (fig. 2.) il diametro della pelle del tamburo, C il centro, e la linea C7 perpendicolare ad A'A, ed alla pelle suddetta. Supponendo, che la pelle sia per principiare una vibrazione, si concepisca essa tagliata da un piano, che passi pel centro C, e sia normale alla pelle, mentre si trova in istato di equilibrio, e di quiete, onde ne risulti la curva A'Q'7QA: si cerca la natura di questa curva. Dongo A'A = a, la massa della pelle = M, la somma delle forze, che uniformemente la tendono tutto all' intorno, = P, le ascisse AH = x, il suo elemento HK = dx, le ordinate HD = y, il suo incremento = dy, l'elemento della curva DQ = ds, e finalmente il raggio osculatore 7D = 7Q = r.

Rappresenti CQxQ (fig. 1.) un mano-

mo

ma settore della palla del tamburo, ed espressa per $4b$ la circonferenza del circolo, il cui raggio $= c$, sarà la circonferenza d'essa palla $= \frac{2bd}{c}$. Stabilita $ene = \frac{2bd}{kc}$, è facile da dedursi la conseguenza, che la porzione di forza applicata ad ene si eguaglierà a $\frac{p}{k}$. Giacchè $CA = \frac{1}{2}d$, $AH = x$, resterà $CH = \frac{1}{2}d - x$. Per la similitudine dei settori $CeAne$, $CGHnG$ abbiamo

$$CA : CH :: ene : GnG$$

$$\tfrac{1}{2}d : \tfrac{1}{2}d - x :: \frac{2bd}{kc} : \frac{4b}{kc}\cdot\overline{\tfrac{1}{2}d - x},$$

e perciò sarà l'aja $GnGndd = \frac{4b}{kc}\cdot\overline{\frac{1}{2}d - x}\cdot dx$. Troveremo l'infinitesima porzione di massa spettante all'elemento di palla $GnGndd$ col mezzo della seguente analogia

$$\frac{2bd}{c}\cdot\frac{d}{4} = \frac{bd^2}{2c} : M :: \frac{4b}{kc}\cdot\overline{\tfrac{1}{2}d - x}\cdot dx : \frac{4M\cdot\overline{\frac{1}{2}d - x}\cdot dx}{kd^2}.$$

Condotte le infinitesime tangenti DP, eP (fig. 2.), e compiuto il parallelogramo PN, sappiamo per i canoni della forza composta, che lo stiramento $\frac{p}{k}$ della palla eD sta alla forza f, che la spinge per la direzione PN, come $DP : PN$ :: ma $DP : PN :: 1D : De$; dunque analiticamente $\frac{p}{k} : f :: r : ds$, e perciò $f = \frac{p\,ds}{kr}$ si è quella forza, che smuove la particola De per la direzione $P1$, la quale coincide adequatamente colla direzione DH, supponendosi minima la saetta $C1$, e la curva $A1A'$ pressochè parallela alla linea AA'. Per un tal motivo potendosi confondere ds con dx, avremo $f = \frac{p\,dx}{kr}$. Avendo trovato $\frac{4M\cdot\overline{\frac{1}{2}d - x}\cdot dx}{kd^2}$ uguale

alla

alla massa della nostra particella Da, se di: videremo la forza f per la detta massa, si scoprirà la forza acceleratrice $= \frac{pL^2}{4Mv.\overline{\frac{1}{2}L-x}}$

Si rifletta, che se tutti i punti della palla hanno da giungere al piano A'CA nel tempo stesso, la forza acceleratrice debbono stare come le ordinate $HD = y$, e per conseguen: za dee verificarsi l'equazione $\frac{pL^2}{4Mv.\overline{\frac{1}{2}L-x}} = \frac{y}{a}$ (1.)

Posto che si prenda come costante l'elemento dx delle assisse, è noto essere $v = \frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$: ma nella curva A'C'ZCA è dy incomparabile con dx: dunque $v = \frac{dx^2}{-ddy}$. Surrogato questo valore nella formola (1.), avremo $\frac{-pL^2 ddy}{4M.\overline{\frac{1}{2}L-x}.dx^2} = \frac{y}{a}$, o sia

$-\frac{apL^2}{4M}\cdot\frac{ddy}{y} = \overline{\frac{1}{2}L-x}.dx^2$ (2.), e facendo

$\frac{apL^2}{4M} = g$ (3.), $\frac{1}{2}L-x = q$ (4.), e conseguen: temente $-dx = dq$; $-\frac{g\,ddy}{y} = q\,dq^2$ (5.).

VI. Affine di ridurre una tal formola alla prima differenza, pongo $y = c\left(\frac{a}{c}\right)^{-\frac{v}{c}}$, onde si abbia $dy = -c\left(\frac{a}{c}\right)^{-\frac{v}{c}} dv$, $ddy = -c\left(\frac{a}{c}\right)^{-\frac{v}{c}} ddv + c\left(\frac{a}{c}\right)^{-\frac{v}{c}} dv^2$, e $\frac{ddy}{y} = -ddv + dv^2$. Dalla sostituzione di questo valore nella formola (5.) ne nasce $g.\overline{ddv - dv^2} = q\,dq^2$ (6.). Facciasi $dv = z\,dq$, e differenziando, $ddv = dz\,dq$. Avverto, che supponendosi costante dx, è parimente tale $dq = -dx$. Surrogati nell' equazione (6.) in cambio di dv, e di ddv i loro valori, ci si presenterà $g\,dz\,dq - g\,z^2 dq^2$

=

$= q\,dq^2$, e dividendo per dq, $g\,dz - g^2 dq = q\,dq$ (3.), in cui sono sparite la seconda differenze.

VII. Questa formola è contenuta nella generale proposta negli Atti di Lipsia agli Analisti dal Co: Jacopo Riccati mio Padre, acciocchè determinassero gli infiniti casi, nei quali si possono separare le variabili; e non accordandosi con veruno dei detti casi, io non so la maniera di ottenere la bramata separazione. Ma giacchè non è noto il metodo di sviluppare le incognite nella nostra formola, tentiamone la costruzione col mezzo del moto trattorio, e facciamo uso del metodo contenuto nel Capitolo VIII. delle Opere del P. Vincenzo Riccati mio fratello <u>De usu motus tractorii in constructione æquationum differentialium</u>.

La predetta formola si scrive così $\overline{g^2+q}\cdot\frac{dq}{g} = dz$. Pongo $g = \varphi + gz^2 + q$, onde si abbia $0 = d\varphi + 2gz\,dz + dq$, e moltiplicando per $\frac{q}{g}$, $0 = \frac{q\,d\varphi}{g} + q\cdot\frac{\overline{2gz\,dz + dq}}{g}$, la qual formola aggiunta alla prima parte della equazione da costruirsi, non la muta. Sarà perciò $\overline{g^2+q}\cdot\frac{dq}{g} + q\cdot\frac{\overline{2gz\,dz+dq}}{g} + \frac{q\,d\varphi}{g} = dz$. Faccio nuovamente $\frac{q\,d\varphi}{g} = -dp$ (4.), e sarò $\overline{g^2+q}\cdot\frac{dq}{g} + q\cdot\frac{\overline{2gz\,dz+dq}}{g} - dp = dz$, ed integrando $\frac{g^2 q + q^2}{g} - p = z$ (5.).

agli

Schediasma IX.

Egli è di uopo prima descrivere il luogo, in cui le assisse IC (Fig. 3.) sono costanti $= g$, e le ordinate $Ce = z$: il quale, come è noto, sarà alla linea retta. Fatta dunque $CI = g$, si meni alla stessa la CN normale; in cui si debbono prendere le $Ce = z$. Si concepisca poscia descritta la curva C7D dalle coordinate $IH = \varphi$, $H7 = p$, ed si conduca 7L parallela ad IC, ed 7e, che tocchi la curva CD nel punto 7. Perchè $-d\varphi : dp :: 7L = g - \varphi = \overline{g^2 + q}$: Le, sarà $Le = \frac{\overline{g^2+q} \cdot dp}{-d\varphi}$: ma conforme la equazione (4.) $dp = -\frac{q\,d\varphi}{g}$; dunque $Le = \frac{\overline{g^2+q} \cdot q}{g}$; dunque sottratta $LC = p$, resterà $Ce = \frac{\overline{g^2+q} \cdot q}{g} - p = z$, siccome richiede la formola (9.): per la qual cosa la curva C7D si può descrivere a modo di trattoria, che ha per base la linea retta CN, in cui si debbono prendere le $Ce = z$.

VIII. Acciocchè si determini la condizione, colla quale la trattoria C7D dee descriversi, si rifletta essere $eL = \frac{\overline{g^2+q} \cdot q}{g}$, ed $7L = \overline{g^2+q}$: quindi rispettivamente a ciascuna $Ce = z$ dobbiamo delineare la curva e27V, le cui assisse $eL = \frac{\overline{g^2+q} \cdot q}{g}$, e le ordinate $L7 = \overline{g^2+q}$; dimodochè si abbia una serie di infinite curve col parametro variabile $Ce = z$, il quale in ciascuna è costante. Dipoi fatto moto da C verso e, si delinei la trattoria C7D in

tal

tal guisa, che quando il filo è pervenuto in Q, il punto descrivente F sia nella curva QZV, il cui parametro $CQ = z$, ed il principio della assissa nel punto Q. Finalmente seguata $CN = CI = g$, si determini l'angolo $CNK = LFQ$, onde ne risulti l'analogia $LF : LQ :: CN : CK$

$$g z^2 + q : \overline{g z^2 + q} \cdot \frac{q}{g} :: g : q,$$

ed accaderà, che a $CQ = z$ corrisponda $CK = q$. Quindi descritta parallela a CQ, CK le due linee KG, QG, che si intersechino nel punto G, e fatta passare per gl'infiniti punti G la curva CGQ, si avrà sempre $CK = q$, $KG = z$, e soddisfarà essa curva alle equazione (2.) $g dz - g z^2 dq = q dq$. Le cose dette, e l'analisi rendono manifesta la dimostrazione.

Conosceremo la natura della curva QZFV, ponendo le assisse $QL = \frac{\overline{g z^2 + q} \cdot q}{g} = S$, e le ordinate $LF = g z^2 + q = T$. Da questa seconda equazione si raccoglie $T - g z^2 = q$. Sostituito un tal valore nella prima, ci si presenterà $\frac{T \cdot \overline{T - g z^2}}{g} = S$, luogo alla parabola Apolloniana, il cui lato retto $= g$, considerata $CQ = z$ in qualità di costante. Taglio $QM = \frac{g z^4}{4}$, ed al punto M conduco la normale $MZ = \frac{g z^2}{2}$, e poscia delineo PZO parallela ad NL. All'asse ZO, col vertice in Z, e col lato retto $= g$ descritta la parabola QZFV, che passerà pel punto Q, sarà essa la direttrice della trattoria CFD rispettivamente a $CQ = z$. Avverto, che

tutta

tutte le parabole direttrici hanno lo stesso lato retto $= g$; ed essendo per conseguenza una stessa parabola, variano solo nella posizione dipendente dai valori delle linee $eM = \frac{gz^4}{4}$; $MZ = \frac{gz^2}{2}$, i quali si mutano al cangiarsi della linea $Ce = z$.

Determineremo la strada, per cui dee muoversi il vertice Z della direttrice eZ7V, colla condizione, che l'asse ZO si conservi sempre parallelo alla linea Md, descrivendo la curva CZB, le cui ascisse $CM = Ce + eM = z + \frac{gz^4}{4}$, e le ordinate $MZ = \frac{gz^2}{2}$. Si costruisce la predetta curva col mezzo di due parabole coniche, la prima delle quali ha le ascisse $= Ce = z$, e le ordinate $MZ = \frac{gz^2}{2}$; e la seconda le ascisse $eM = \frac{gz^4}{4}$, e le ordinate $MZ = \frac{gz^2}{2}$. Si adatti a queste due parabole la stessa ordinata, e congiunte in una somma le corrispondenti ascisse, si tagli uguale ad essa somma la linea CM, e fatta MZ uguale all'ordinata comune ad ambo le parabole, il punto Z apparterrà alla curva CZB.

IX. Nello strumento, col quale l'accuratissimo Signor Marchese Giovanni Poleni descrive la più semplice trattoria, la direttrice, che è una linea retta, cammina sempre parallela a se stessa sopra un' altra linea retta. Ora se la direttrice, e la strada, per cui si muove, si cangeranno nelle linee curve eZ7V, CZB, si otterrà non difficilmente da un perito

Artefice

Avrassi a fabbricare un organo atto a deli=neare la nostra trattoria CZD.

X. Quando $CK = q = o$, e che di più, come nella fig. 2., a cui è adattata la fig. 3., a C corrisponde il massimo valore di $y = c = CZ$; anche $Ca = z = o$; dimodochè il punto C coincide con ambo i punti K, a. Avendo di sopra al numero VI. messo $y = c\left(\frac{a}{c}\right)^{-\frac{v}{c}}$, ed essendo $-dy = c\left(\frac{a}{c}\right)^{-\frac{v}{c}} dv$, se ne deduce $\frac{dy}{y} = -dv$, o sia $-\frac{dy}{y} = dv$: ma si è inoltre stabilito $dv = z\,dq$; dunque $-\frac{dy}{y} = z\,dq$; ed allorchè $y = c$, $-\frac{dy}{dq} = cz$;
Ora richiedendo il massimo valore di y, che sia $-\frac{dy}{dq} = o$, avremo in tal caso $cz = o$; il che non può verificarsi, se non si annulla la z.

A $q = \frac{1}{2}L = CA$ dee riferirsi $z = \infty$.
Giacchè $-\frac{dy}{y} = dv$, ~~[illegible]~~ e nel punto A (fig. 2.) $y = o$, avremo $-\frac{dy}{o} = dv$, e perciò $o : -dy :: 1 : dv$: ma $-dy$ è infinito rispettiva=mente al nulla; dun=que anche dv rispet=tivamente all'unità; e quindi $dv = \infty$. E poichè $dv = z\,dq$, sarà $z\,dq$, e molto più $z = \infty$.

Non trascuro di notare, che condotta AR normale a $CA = \frac{1}{2}L$, sarà AR l'assintoto della curva CGR.

XI. Essendo $CK = q$, $KG = z$, ne segue, che l'aja CKG si agguaglia a $\int z\,dq = v = ly$. Il numero pertanto, che corrisponde al logaritmo $CKG = v$ nella logistica della suttangente $= 1$ ri=ferita al protonumero $= c$, pareggerà

(fig. 2.)

(fig. 2.) l'ordinata $KE = y$ della curva $A'E'ZEA$, a cui si conforma la pelle del tamburo, quando si vibra; e quindi descritta la trattoria CZD (fig. 3.) ci si mostrerà potersi delineare la curva cercata $A'E'ZEA$ (fig. 2.), purchè prima si determini l'appropriato valore della costante $g = CI \pm CN$.

XII. La trattoria CZD (fig. 3.) ha un secondo ramo $CZ'D'$ uguale al CZD, ma collocato negativamente. A questo corrisponde un secondo ramo $CG'Q'$ della curva CGQ situato anch'esso negativamente, onde alle y negative si riferiscano le z parimente negative. Il perchè a due uguali assisse $CK = y$, $CK' = -y$ competono due uguali ordinate $KG = z$, $K'G' = -z$, ed essendo eguali, ed amendue positive l'aje CKG, $CK'G'$, sopra due pari assisse CK, CK' (fig. 2.) insistono uguali ordinate KE, $K'E'$, ed i due rami ZEA, $ZE'A'$ sono perfettamente uguali.

XIII. La pelle del tamburo può prendere infinite altre figure. Comincio dal considerare quella, che ha tre ventri, cioè (fig. 6.) $A'nZ'S'ZSnZA$, siccome più analoga alla figura seconda. Col metodo spiegato si descriva (fig. 2.) il ramo di trattoria CZD, e si intenda continuato all'infinito. Mediante un tal ramo si determinerà il corrispondente CGQ, in riguardo a cui la assisse $= y$, e le ordinate $= z$. La tangente infinita TD somministrerà $CT = z = \infty = SQ$, che si riferirà ad un dato

valore

valore di $q = CS$; il quale dipende dalla grandezza della costante g conficcante alla fig. 6.

Il ramo $C7'D'$ (fig. 7.) è uguale al $C7D$, e soltanto situato contrariamente. Col suo ajuto si delinea il ramo $CG'Q'$ uguale al CGQ, se non che in esso sono negative le q, e le z. Questi due rami CGQ, $CG'Q'$ servono a costruire il solo ventre $S7S'$ (fig. 6.); laonde per descrivere gli altri due ventri $S27A$, $S'27'A'$, si rendono necessarj altri quattro rami di trattoria $2f2D$, $2f3D$; $2f'2D'$, $2f'3D'$, ed altresì i corrispondenti $2C2Q$, $2C3Q$; $2C'2Q'$, $2C'3Q'$.

Per ottenere lo intento, immaginiamoci già delineato il ramo di trattoria $2f2D$, che sia toccato dalla retta $27Q$ nel punto 27. Si tirino $2\,27\,2H$, $27L$ parallele, quella a CT, questa a $C2H$. Conciossiachè, come ho dimostrato, $QL = \frac{q^2 + g \cdot q}{g}$, $L27$ $= g^2 + q$; se accaderà, che il punto $2H$ cada in $2C$, a cui si riferisce (fig. 6.) un massimo valore di $q = -c = 2C27$, il quale richiede $z = 0$; avremo, tagliata $CN = g$, $L27 = C2H = q = C2C$, e sia $CL = \frac{q^2}{g} = \frac{\overline{C2C}^2}{CN}$. Condotta pertanto parallela a CT la linea $2C2f = 2C'2f' = \frac{\overline{C2C}^2}{CN}$, e segnata la diagonale $2f'C2f$, toccherà essa i quattro rami della trattoria nei punti $2f$, $2f'$. Se si avesse la macchina atta a descrivere la trattoria conveniente al diametro $A'A = L$ del tamburo, alla fig. 6. di tre ventri, ed alla relativa costante CN $= g$

$= \xi$; la macchina stessa determinerebbe le linee $CS = CS'$, $CaC = CaC'$, fra le quali le prime corrispondono a $z = \mp \infty$; la seconda a $z = 0$. Il ramo $afaD$ ci dà le $Ca = -z$, e serve a delineare il ramo rispettivo $aCaCaQ$, in cui alla q positiva $= Cak$ corrispondono le z negative $= akaG$. Ci vengono somministrate le z positive dal ramo $af3D$, e da esse dipende la descrizione del ramo analogo $aC3G3Q$, nel quale le coordinate $C3k = q$, $3k3G = z$ sono amendue positive. Sopra le q negative insistono le z positive nel ramo $aC'aG'aQ'$, che procede dal ramo della trattoria $af'aD'$; e finalmente nel ramo $aC'3G'3Q'$ generato da quello della trattoria $af'3D'$ le coordinate sono tutte e due negative.

XIV. Dovendo essere nel punto aC, dove (fig. 6.) $y = aCaD = c$, $\int z\,dq = ly = 0$, le due aje (fig. 7.) CSQ, $aCSaQ$ una positiva, e l'altra negativa hanno necessariamente da uguagliarsi fra loro. Avremo pertanto $CSQ - aQSakaG = akakaG = \int -z.-dq = \int z\,dq = ly$. Quindi il numero corrispondente al logaritmo $aCakaG$ nel ramo delle ordinate decrescenti negative della logistica, la cui suttangente $= 1$, ed il protonumero $= c$, si eguaglierà all'ordinata $akaQ$ (fig. 6.) della curva $A'aD'S'DSaDA$, a cui si può accomodare la palle del tamburo, mentre si vibra. Ho detto, che l'ordinata $akaQ$ esser dee negativa; imperciocchè la quiete del punto S richiede, che i due rami SDS', $SaDA$ siano situati uno al contrario dell'altro.

Questa

Questa osservazione conferma vie più la sentenza, che siano reali i logaritmi dei numeri negativi.

Giacchè nel punto nC (fig. 5.) $\int zdq = 0$, sarà nel punto $3K$ $\int zdq = nC3K3G = ly$; laonde si scoprirà (fig. 6.) $-y = 3K3e$. E poichè l'aja totale (fig. 5.) $nCA3Q = \infty$, ne segue dover essere nel sito A (fig. 6.) $-y = 0$

Saremo guidati da simili riflessioni alla descrizione del ramo $S'n2'A'$; ed io le lascio ben volontieri alla industria di chi legge.

XV. La costruzione delle figura fornite di un numero impari di ventri maggiore del tre, a cui può adattarsi la pelle del tamburo, è affatto simile a quella di tre ventri, dovendo solamente moltiplicarsi i rami della trattoria, il cui numero ha da esser doppio di quello dei ventri, e lo stesso dicasi dei rami delle coordinate q, z.

XVI. Mi rivolto alla descrizione della figura con due ventri $A'Z'SZA$ (fig. 4.), che può competere alla pelle del tamburo. Segno (fig. 5.) $A'A = \alpha$, che taglio per metà nel punto S, e per i punti A', S, A tiro normali a detta linea le rette infinite $A'nQ'$; QSQ'; AnQ; che saranno gli asintoti della curva $nQ'nG'C'$, $C'GQ'$, QGC, $CnGnQ$ esprimenti la relazione fra q, e z; perchè, come ho notato di sopra, nei punti A', S, A, dove $y = 0$,

esser

essere dee $z = \infty$. Rispettivamente ai punti C', C, ai quali (fig. 4.) corrispondono le massima ordinate $C'T' = -c$, $CT = c$, ho già osservato, che dee aversi $z = \infty$, o sia (fig. 5.) $KG = SQ = \infty$. Laonde in tale incontro la tangente Sf della trattoria fTD dee passare pel punto S. Condotta al punto qualunque T della suddetta trattoria la tangente QT, e poscia delineata Td parallela ad AA', abbiamo generalmente $Td = g^2 + q^2$, $Qd = \frac{g^2 q + q^2}{g}$. Ora quando il punto T cade sopra il punto f, e la linea Td sopra la fl, anche il punto Q coincide col punto S, dovendo essere $SQ = -z = \infty$. Il perchè scopriremo $fl = q$, $Sl = \frac{q^2}{g}$, cioè $fl = SC$, e fatta $SN = g$, $Sl = \frac{\overline{SC}^2}{SN}$. Si tirino pertanto normali ad $A'A$ le rette $Cf = C'f' = \frac{\overline{SC}^2}{SN}$, e descritta la linea fSf', toccherà essa le trattorie fD, fnD; $f'D'$, $f'nD'$ nei punti f, f'. Immaginiamoci delineate esse trattorie colla macchina adattata al diametro del tamburo $A'A = d$, alla fig. 4. di due remi, ed alla rispettiva costante $SN = g$, e la macchina stessa determinerà i punti C, C', a cui dee riferirsi $z = \infty$. Serviranno questi quattro rami per descrivere i corrispondenti CGQ, $CnGnQ$, $C'G'Q'$, $C'nG'nQ'$ della curva, le cui coordinate y, z. La toccante per esempio TQ determina $SQ = -z$. Si faccia l'angolo $SNK = dTQ$, ed alzata normale ad $A'A$ la retta $KG = SQ$, il punto G apparterrà

alla

alla curva QGC, e sarà $SK = q$, $KG = -z$.

XVII. Poichè $SK = q$, $KG = -z$, avremo $CKG = \int -z \cdot -dq = \int z dq = ly$, laonde (fig. 4.) $KG = y$ s'uguaglia al numero, che nel ramo delle ordinate decrescenti della logistica, la cui sottangente $= 1$, ed il protonumero $= c$, corrisponde al logaritmo $= \int z dq = CKG$ (fig. 5.) Nel punto S $\int z dq = \infty$, e perciò $y = 0$. Al contrario nel punto C $\int z dq = 0$, e per conseguenza $y = c$.

Quando $SnK = q$ è maggiore di SC, e minore di SA, ci si presenta l'ordinata positiva $nKnG = z$, ed anche in tale circostanza $\int z dq = CnKnG$. Diventando essa sommatoria infinita nel sito A, dove $q = SA = \frac{1}{2}d$, se ne deduce essere $y = 0$.

Con avvertenze analoghe alle fatte testè giungeremo alla descrizione del $S\gamma A'$ (fig. 4.), se non che è collocato al contrario.

XVIII. Se la curva, a cui si conforma la pelle del tamburo, avesse 4, 6, 8, &c. ventri, si richiederebbe per descriverla un numero di rami di trattoria, che fosse doppio di quello dei ventri. Io non mi fermerò su tali costruzioni, potendo esse agevolmente effettuarsi colla scorta di quella contenuta nella fig. 5., che ho accuratamente spiegata.

XIX. Resta, che si tenti la determinazione della costante g. Se nella formola (9.) $\frac{g^2 q + q^2}{g} - p = z$ pongo rispettivamente

al punto medio del diametro del tamburo $y=0$; e che al detto punto medio corris= ponda la massima ordinata $CZ = y = 0$ (fig. 2, 6), ne risulta $z = 0$, $p = 0$; e trovando $0 = 0$, non posso stabilire la grandezza della costante g. Che se nel mentovato punto di mezzo $y = 0$ (fig. 4.), e $\mp z = \infty$, si annulla certamente il termine g^2, e svanendo dall'equa= zione la costante g, non si lascia deter= minare. Ne' vale il supporre $y = \pm \frac{1}{2} d$; imperciocchè divenendo nei punti A, A' (fig. 2, 4, 6.) $z = \pm \infty$, e dileguandosi adequatamente il termine g^2, sparisce anche in tale incontro la nostra costante.

Bisogna dunque procurare di stabilirne il valore meccanicamente. Siccome la figura, a cui si adatta una cor= da sonora oscillando, non dipende nè dal= la massa, nè dalla grossezza costante più grande o più piccola, nè dalla tensione, ma soltanto dalla lunghezza, e dalla mas= sima saetta; non altrimenti la figura presa dalla pelle di un tamburo, che si vibra, ha da essere unicamente determi= nata dal diametro della pelle, e dalla massima saetta. Se sono analoghe le figure di due corde, cioè se si vibrano intere, o divise nello stesso numero di parti, e che di più la saetta massima sia costante; ad assisse proporzionali alla lunghezze corrispondono ordinate uguali. Il medesimo dee accadere in due

due tamburi, le cui pelli si conformino a figure analoghe, e si ricurvino a pari saetta. Mettiamoci sotto gli occhi la formola spettante al tamburo $-g\frac{ddy}{y} = gdy^2$ (5.), e prese le ascisse g, ed i loro elementi dg proporzionali ai diametri δ, ne risultano y, dy, ddy eguali in ambo i tamburi. Quindi sarà costante il valore $-\frac{ddy}{y}$, e stando gdy^2 come δ^3, sarà parimente g come δ^3.

Noto raccogliersi dall'equazione (3.) $g = \frac{aP\delta^2}{4M}$, che se due pelli ripiegate in figure analoghe, della stessa materia, ed ugualmente grosse verranno tese da una pari somma di forze P, dovrà stare $\frac{a\delta^2}{M}$ come δ^3, e per conseguenza a come δ^3; essendo in detta ipotesi M come δ^2: ma al numero XXII. proverò, che esse pelli si vibrano nel tempo $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$; chiamando h la lunghezza di un pendolo a secondi; dunque nella notata circostanza t come $\sqrt{\delta^3}$.

Cogli organi idonei relativi ad un valore arbitrario G della costante g si descrivano prima le trattorie, indi col metodo insegnato le curve delle coordinate g, z, e finalmente la curva, in cui si ripiega la pelle del tamburo, espressa nelle figure 2, 4, 6, &c., ed accaderà, che rimanga determinata la lunghezza della linea $A'A$, che riuscirà sempre più grande, quanto maggiore sarà il numero dei venti.

Facciasi

Facciasi $\overline{A'A}^3 : L^3 :: G : g = \frac{GL^3}{\overline{A'A}^3}$,

ed il quarto termine si aguaglierà alla costante appropriata al diametro L del tamburo, il valor della quale si scoprirà gradatamente più piccolo, secondochè la curva, a cui la pelle può accomodarsi, di un numero più grande di ventri è fornita.

E poichè per la formola (3.) $g = \frac{a.PL^2}{4M}$, troveremo $a = \frac{4G.LM}{\overline{A'A}^3.P}$. Se le pelli di varj tamburi prendano figure analoghe, cioè a dire composte dello stesso numero di ventri, la grandezza $\frac{4G}{\overline{A'A}^3}$ sarà costante, e perciò a come $\frac{LM}{P}$, conforme succede altresì nelle corde.

XX. Debbo per altro avvertire, che senza determinare i valori della costante g proprj del diametro L, si può effettuare la descrizione delle figure 2, 4, 6, &c. E voglia il vero, scelta una qualunque costante G, ed apprestate le macchine opportune, si pervenga col metodo dichiarato alla costruzione delle figure analoghe alle 2, 4, 6, &c., nelle quali la massima saetta sia c, e la linea indicante il diametro del tamburo = NL. Si tagli un'assissa, a cui corrisponda l'ordinata y, poscia instituendo l'analogia come NL ad L, così questa assissa ad AK (fig. 2, 4, 6, &c.), si faccia, che al punto K si riferisca la

stessa

stessa ordinata $y = ke$; ed il punto e apparterrà alle curve confacenti al diametro $AA' = \mathcal{L}$.

XXI. La presente soluzione può servire per dare un saggio dell'uso del moto trattorio nei problemi più difficili, quando non si può ottenere la separazione delle variabili. Essendo pertanto meccanica la descrizione della trattoria, non dobbiamo maravigliarci, se col mezzo di essa la costante g si determina soltanto meccanicamente. Egli è dunque di uopo dunque ricorrere a qualche altro metodo, che ci conduca all'analitica determinazione della predetta costante.

<u>Metodo per determinare analiticamente la costante g, ovvero a, ed il tempo di una vibrazione del tamburo.</u>

XXII. Conciossiachè abbia stabilito al numero V. eguale ad $\frac{y}{a}$ la forza acceleratrice dei punti della pelle del tamburo, ricorrendo alla formola della forza continuamente applicata, e considerando per esempio (fig. 2, 4, 6, ec.) il moto del punto 7, la cui velocità $= u$ (posta $7C = c$, e lo spazio da scorrersi sino al piano $A'A = y$) mi si presenterà $\frac{y}{a} \cdot -dy = udu$. L'integrazione mi dà $\frac{c^2 - y^2}{a} = u^2$, aggiungendo la necessaria costante, onde sia $u = 0$, quando $y = c$; ed estratta la radice, $\sqrt{\frac{c^2 - y^2}{a}} = u$: ma chiamato dt il tempicello, in cui dal punto 7 si passa lo spazio

$-dy$; $u = -\frac{dy}{dt}$; dunque $dt = \sqrt{a} \cdot \frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$,

e nuovamente integrando, $t = \sqrt{a} \int \frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$.

Sia b il quadrante circolare relativo al raggio c, ed allorchè il punto z, e per conseguenza anche tutta la palla ha compiuta una vibrazione, avremo $\int \frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}} = \frac{2b}{c}$; e perciò in tale circostanza $t = \frac{2b}{c}\sqrt{a}$.

Si scoprirà il tempo t espresso esempigrazia in secondi, paragonando il tamburo con un pendolo a cicloide, il tempo di una vibrazione del quale si esprime per la frazione $\frac{2b}{c}$ moltiplicata nella radice della lunghezza. Nomino h la lunghezza del pendolo, che fa una vibrazione per secondo, ed instituita l'analogia $t : \frac{2b}{c}\sqrt{a} :: 1 : \frac{2b}{c}\sqrt{h}$, ritroveremo $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$ (10.) tempo misurato in secondi d'una vibrazione del tamburo, il quale si renderà noto analiticamente, qualora col calcolo si stabiliscano gl'infiniti valori di a appropriati alle altrettante diverse figure, che può prendere la palla del tamburo oscillando.

XXIII. Fingasi, che la palla del tamburo si adatti, mentre si vibra, ad una curva fornita di un numero infinito di ventri. La distanza fra due punti stabili prossimi sia dq, avvertendo, che dq non lo considero costante, ma variabile con quella legge, che poscia determinerò. Posta (Fig. 1.) $CK = \frac{1}{2}L - x = q$, $KH = -dx = dq$, dalle

cosa

cosa detta al principio di questo schediasma al numero V. raccogliesi essere la massa della porzione di palle $LGnGnd$

$$= \frac{4M \cdot \overline{\tfrac{1}{2}L - x} \cdot -dx}{kL^2} = \frac{4Mq\,dq}{kL^2}.$$

Se il raggio c mi dà la circonferenza $4b$, al raggio $\frac{1}{2}L$ corrisponderà la periferia $\frac{2bL}{c}$. Nel luogo citato ho stabilito $Ln\,L = \frac{2bL}{kq}$, e giacchè la palle del nostro tamburo è resa uniformemente tutto all'intorno dalle somma di forze $= P$, all'arco LnL ne tocca la porzione $\frac{P}{k}$.

Essendo $LnL = GnG$ adequatamente, si può considerare la palle $LGnGnL$ come una corda di costante grossezza LnL, la cui lunghezza $KH = dq$. Per la nota legge adunque spettante alle corde grosse invariabilmente, il tempo espresso in secondi di una sua vibrazione sarà

$$t = \frac{c}{2b}\sqrt{\frac{4Mq\,dq \cdot dq}{kL^2 \cdot \frac{hP}{k}}} = \frac{c}{2b}\sqrt{\frac{4Mq\,dq^2}{L^2hP}}\ (11.),$$

significando h la lunghezza di un pendolo a secondi:

Si stabilisca costante la quantità $q^{\frac{1}{2}}dq$, il che accaderà, quando dq stia sempre in ragione inversa di $q^{\frac{1}{2}}$, e la predetta formola esprimente il tempo di una vibrazione della corda di minima lunghezza $KH = dq$ mi insegna, che giusto li assunta ipotesi il doppio settore $LnLL$ ne è sarà diviso in un numero infinito di cordicelle unisone di lunghezza variabile

bili dq, che si vibreranno in tempo costante. Osservo essere $\int q^{\frac{1}{2}}dq = \frac{2}{3}q^{\frac{3}{2}}$, e ponendo $q = \frac{1}{2}L$, $\int q^{\frac{1}{2}}dq = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$. In riguardo al doppio settore $ArA\ CrC'$ avremo la mentovata sommatoria $= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$. Sia $q^{\frac{1}{2}}dq = \dfrac{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}}{n}$, e comprendendo la quantità $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$ tanti elementi costanti $q^{\frac{1}{2}}dq$, quanti elementi variabili dq si contengono in $A'A = L$, pareggiarsi n il numero infinito di ventri, nei quali si suppone diviso il diametro $A'A = L$. Nella formola (11.) sostituisco in cambio di $q^{\frac{1}{2}}dq$ il suo valore $\dfrac{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}}{n}$, e mi si presenta

$$t = \frac{2c}{n.3b}\sqrt{\frac{LM}{hp}}\ (12.).$$

Questa formola, che si è dedotta dalla supposizione di $n = \infty$, si adatta, come vedremo al numero XXVII, a qualsivoglia grandezza di n, e determina il tempo di una vibrazione del tamburo uguale alla quantità $\frac{2c}{3b}\sqrt{\frac{LM}{hp}}$ divisa per n numero dei ventri.

Essendosi scoperto al numero XXII. $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$ (10.), avremo $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}} = \frac{2c}{n.3b}\sqrt{\frac{LM}{hp}}$, e per conseguenza $a = \frac{4c^2}{9n^2b^2}\cdot\frac{LM}{p}$ (13.). E perchè per la formola (3.) $\frac{apL^2}{8M} = g$, ne risulta

$$g = \frac{c^2}{18n^2b^2}\cdot L^3\ (14.).$$

XXIV.

XXIV. Ora egli è d'uopo indagare la distanza dal centro del tamburo dei nodi, o punti stabili, che separano un ventre dall'altro, quando il numero dei ventri $n = \omega$. Sia primieramente $n = \omega$ numero impari. Si richiami a memoria essere $\int q^{\frac{1}{2}} dq = \frac{2}{3}\sqrt{q^3}$, considerato un solo settore $e\,r\,e\,C$. (Fig. 1.). Ponendo $q = \frac{1}{2}L$, avremo $\int q^{\frac{1}{2}} dq = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, e tale è la somma di tutte le minime grandezze costanti $q^{\frac{1}{2}} dq$ in riguardo al mentovato settore. Questa somma divisa per ω è relativa al primo semiventre, ed alla distanza del primo nodo dal centro del tamburo; laonde avremo l'equazione $\frac{2}{3}\sqrt{q^3} = \frac{2}{3\omega}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, da cui si raccoglie $q = \frac{L}{2\sqrt[3]{\omega^2}}$.

Si renderà noto il valore della distanza del secondo nodo dal centro del tamburo, prendendo 3. parti $\frac{2}{3\omega}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, e formando l'equazione $\frac{6}{3\omega}\sqrt{\frac{L^3}{8}} = \frac{2}{3}\sqrt{q^3}$, che determina $\frac{\sqrt[3]{3^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}} = q$.

La quantità $\frac{2}{3\omega}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$ moltiplicata per cinque mi somministra la lontananza del terzo nodo dal centro del tamburo col mezzo della formola $\frac{2}{3}\sqrt{q^3} = \frac{10}{3\omega}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, da cui si deduce $q = \frac{\sqrt[3]{5^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}}$.

Generalmente le distanze dei nodi dal centro del tamburo, se il numero ω dei ventri è impari, si esprimeranno per la seguente serie

$$\frac{\sqrt[3]{1^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}},\ \frac{\sqrt[3]{3^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}},\ \frac{\sqrt[3]{5^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}},\ \text{\&c.}\ \frac{\sqrt[3]{\omega^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}} = \frac{1}{2}L.$$

Schediasma IX.

Per chiaramente dimostrare, che in essa serie l'ultimo termine è rettamente determinato, osservo che i numeri 1, 3, 5, &c. dinotano la quantità impari dei ventri contenuti dentro quella tale distanza dal centro del tamburo. La prima distanza contiene un ventre solo, la seconda tre, la terza cinque, &c. Ciò premesso, quando il numero dei ventri impari è divenuto infinito, e siamo giunti al punto A; tanto il numero superiore, quanto l'inferiore $= \infty$ significa il numero infinito impari dei ventri, nei quali si è ripiegata la pelle del tamburo; e perciò questi numeri infiniti debbono uguagliarsi, onde abbiasi l'ultima distanza $\frac{\sqrt[3]{\infty^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\infty^2}} = \frac{1}{2}L = CA$.

Posto che sia pari il numero ∞ dei ventri, la grandezza $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{L^3}{4}}$ si duplichi, e si divida in tante parti, quante unità si ritrovano in ∞, e poscia si faccia $\frac{2}{3}\sqrt{q^3}$ uguale ad una, a due, a tre, &c. di queste parti, sintantochè si perviene al numero ∞, e si determineranno le distanze dei nodi dal centro del tamburo, che verranno dinotate dalla sottoposta progressione

$$\frac{\sqrt[3]{2^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\infty^2}},\ \frac{\sqrt[3]{4^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\infty^2}},\ \frac{\sqrt[3]{6^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\infty^2}},\ \&c.\ \frac{\sqrt[3]{\infty^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\infty^2}} = \frac{1}{2}L.$$

Anche in questa serie i numeri 2, 4, 6, &c. significano quanti ventri si comprendono dentro la distanza prima,

seconda

secondi, terzi, &c; laonde ascendendo all'infinito, il numero superiore pareggerà l'inferiore $= \infty$, e per conseguenza ne risulterà la ultima distanza dal centro del tamburo $= \frac{\sqrt[3]{\infty^2}\cdot d}{2\sqrt[3]{\infty^2}} = \frac{1}{2}d = CA$.

XXV. Le scoperte distanze dei nodi dal centro del tamburo, quando $n = \infty$, servono a stabilire anche quelle, che sono convenienti a qualunque valore finito di n. Sia per esempio $n = 5$. Il terzo nodo, posto ∞ numero impari, dista dal centro del tamburo per la misura $\frac{\sqrt[3]{5^2}\cdot d}{2\sqrt[3]{\infty^2}}$. Rimanendo immobile il circolo descritto con un tal raggio, qualora la pelle del tamburo oscilla scompartita nel numero di ventri $= \infty$, posso considerare $\frac{\sqrt[3]{5^2}\cdot d}{2\sqrt[3]{\infty^2}}$ come raggio di un tamburo, la cui pelle vibrandosi si adatti ad una curva fornita di cinque ventri. E perchè i tamburi dei raggi $\frac{\sqrt[3]{5^2}\cdot d}{2\sqrt[3]{\infty^2}}$, $\frac{d}{2}$ sono figure simili, richiedono i nodi uguali di numero similmente collocati: ma il primo tamburo accomodandosi ad una curva composta da cinque ventri, ha i nodi primo, e secondo situati alle distanze dal centro $\frac{d}{2\sqrt[3]{\infty^2}}$, $\frac{\sqrt[3]{3^2}\cdot d}{2\sqrt[3]{\infty^2}}$; dunque col mezzo della analogia

$$\frac{\sqrt[3]{5^2}\cdot d}{2\sqrt[3]{\infty^2}} : \frac{d}{2\sqrt[3]{\infty^2}} :: \frac{d}{2} : \frac{d}{2\sqrt[3]{5^2}} = \frac{d}{2\sqrt[3]{n^2}},$$

$$\frac{\sqrt[3]{5^2}\cdot d}{2\sqrt[3]{\infty^2}} : \frac{\sqrt[3]{3^2}\cdot d}{2\sqrt[3]{\infty^2}} :: \frac{d}{2} : \frac{\sqrt[3]{3^2}}{2\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}\cdot d}{2\sqrt[3]{n^2}}$$

si

si renderanno manifeste le lontananze dei nodi analoghi dal centro del tamburo, ch'eccoveggia $\frac{L}{3}$, posto $n=5$.

Facilmente ci accorgevamo, che passando dal particolare al generale, saranno le distanze dei nodi dal centro del tamburo nella ipotesi di n impari ...

$$\frac{L}{2\sqrt[3]{n^2}},\ \frac{\sqrt[3]{3^2}.L}{2\sqrt[3]{n^2}},\ \frac{\sqrt[3]{5^2}.L}{2\sqrt[3]{n^2}}\ \&c.\ \frac{\sqrt[3]{n^2}.L}{2\sqrt[3]{n^2}}=\frac{L}{2}.$$

Collo stesso metodo scoprirò le mentovate distanze, sendo n numero pari

$$\frac{\sqrt[3]{2^2}.L}{2\sqrt[3]{n^2}},\ \frac{\sqrt[3]{4^2}.L}{2\sqrt[3]{n^2}},\ \frac{\sqrt[3]{6^2}.L}{2\sqrt[3]{n^2}}\ \&c.\ \frac{\sqrt[3]{n^2}.L}{2\sqrt[3]{n^2}}=\frac{L}{2}.$$

Paragonate le due progressioni con quelle del numero precedente, differiscono in ciò solamente, che al numero infinito ∞ dee sostituirsi il finito n; e quindi le stesse serie si adattano a qualunque valore di n finito, o infinito.

XXVI. La stabilire i punti tutti della curva, che può prendere la pelle del tamburo, egli è un problema, la soluzione del quale ci guida ad un'equazione differenziale, in cui non è concesso di separare le variabili, e perciò sono stato costretto di ricorrere ad una costruzione meccanica. I punti frattanto, che corrispondono ad $y=0$, sono di meno austera natura, e si lasciano ridurre a computo. Non altrimenti il tempo di una vibrazione del tamburo, e la costante e possono determinarsi col calcolo; perchè se ne deduce la grandezza dalla curva, a cui si adatta una corda costantemente grossa,

la

la descrizione della quale dipende dalla rettificazione del circolo.

XXVII. Passo a dimostrare, che la formola (m.) $t = \frac{2c}{3nb}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$; quantunque dedotta dalla supposizione di $n = \infty$, si adatta a qualsisia valore di n. Supposto impari il numero $n = \infty$; abbiamo pel numero XXIV. la distanza del primo nodo dal centro del tamburo (Fig. 1.) $= CS = \frac{L}{2\sqrt[3]{\infty^2}}$.

La circonferenza delineata col raggio CS resta immobile, quando la pelle si ripiega in una curva fornita del numero ∞ di ventri; dimodochè posso considerare CS come semidiametro di un tamburo. Mi insegna il numero XIX., che le pelli della stessa materia, ugualmente grosse, tese dalla medesima somma di pesi uniformemente, e adattate a curve analoghe esempigrazia di un solo ventre, si vibrano in tempi, che stanno come le radici dei cubi dei diametri, e per conseguenza ancora come le dette potestà dei semidiametri; cioè a dire come $\overline{CA}^{\frac{3}{2}} : \overline{CS}^{\frac{3}{2}}$; ma la pelle, il cui semidiametro CS, si vibra nel tempo $= \frac{2c}{3\infty b}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$; dunque

$$\overline{CS}^{\frac{3}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}L\right)^{\frac{3}{2}}}{\infty} : \overline{CA}^{\frac{3}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}L\right)^{\frac{3}{2}} :: \frac{2c}{3\infty b}\sqrt{\frac{LM}{hP}} : t = \frac{2c}{3b}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$$

tempo di una vibrazione del tamburo, quando la pelle si conforma alla figura fornita di un solo ventre.

Simelmente posta $CK = \frac{L}{2\sqrt[3]{n^2}}$, intendendo per n qualunque termine

dalla

dalla serie 1, 3, 5, 7 &c. ; avremo
$\overline{CS}^{\frac{3}{2}} = \frac{(\frac{1}{2}L)^{\frac{3}{2}}}{m} : \overline{CK}^{\frac{3}{2}} = \frac{(\frac{1}{2}L)^{\frac{3}{2}}}{n} :: \frac{2c}{3mb}\sqrt{\frac{LM}{hP}} : t$
$= \frac{2c}{3nb}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$, ed il quarto termine esprimerà il tempo di una vibrazione del tamburo, secondochè la pelle si accomoda ad una curva composta di ventri 1, 3, 5, 7 &c.

Che se $n = m$ sia numero pari, il numero XXIV. determina $CS = \frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot L}{2\sqrt[3]{m^2}}$.
Facciasi $CK = \frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$, dinotando n qualsisoglia numero della progressione 2, 4, 6, 8 &c, e dall'analogia
$\overline{CS}^{\frac{3}{2}} = \frac{2(\frac{1}{2}L)^{\frac{3}{2}}}{m} : \overline{CK}^{\frac{3}{2}} = \frac{2(\frac{1}{2}L)^{\frac{3}{2}}}{n} :: \frac{2c}{3mb}\sqrt{\frac{LM}{hP}} : t$
$= \frac{2c}{3nb}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$ ne raccoglieremo la formola esprimente i tempi di una vibrazione del tamburo, qualora il numero pari dei ventri si eguaglia ad un termine della serie 2, 4, 6, 8 &c.

Unite insieme le due serie 1, 3, 5, 7 &c., 2, 4, 6, 8 &c. formano quella dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c., e perciò qualunque sia il numero n dei ventri, il tamburo oscillerà nel tempo $t = \frac{2c}{3nb}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$.

XXVIII. Paragonata una tal formola con quella appartenente alla corda $t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$, variano solo nei coefficienti, i quali si riguardano come $\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$, o sia come 4 : 3.

Lo stesso tamburo prendendo in serie le figure di ventri 1, 2, 3, 4 &c.,

si vibreranno in tempi proporzionali alle quantità 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ &c. non altrimenti che le corde di grossezza costante.

Posto che le pelli di due tamburi si adattino a figure analoghe, siano della stessa materia, egualmente grosse, e tese dalla stessa somma di forze = P, staranno la massa M come L^2; ed i tempi t come $\sqrt{L^3}$.

Se supposta pari la materia, e la grossezza di due pelli, fosse P. come L, di maniera che a porzioni eguali della circonferenze si applicassero uguali forze tendenti, si scoprirebbe t come L, conforme succede nelle corde tese, e grosse ugualmente.

Finalmente due pelli della stessa materia, grosse in proporzione dei diametri, e tese da una somma di pesi in ragione composta della grossezza, e dei diametri, cioè a dire duplicata dei diametri stessi, oscilleranno in tempi proporzionali ai diametri. Conciossiachè queste due pelli siano simili, ed ugualmente elastiche, i tempi delle loro vibrazioni accettano la legge comune a tutti i corpi formati della stessa materia, simili, e del pari elastici di oscillare in tempi, che si riferiscono nella ragione dei lati omologhi.

XXIX. La dimostrata legge delle vibrazioni del tamburo vuol confermarsi colla esperienza. Battuto un tamburo, trovai il suo suono relativo alla Fig. 2. unisono al B^6 del mio gravicembalo. Applicai

poscia

poscia un dito al centro del tamburo; onde la pelle dovesse accomodarsi alla Fig. 4., e si udì chiara la ottava acuta, ma alquanto calante, e piuttosto unisona ad a, che a b^6. Toccato col dito il sito S (Fig. 6.), obbligai la pelle a prendere la figura di tre ventri. Non avvenerti in tale contatto il suono B^6 interveniente; di maniera che ci voleva molta attenzione a discernere il suono proprio della Fig. 6. s che nulladimeno si rendea manifesto; specialmente quando il suono stava per estinguersi, cessando prima il suono B^6, a cui il dito recava impedimento, del suono acuto, il quale si rendè unisono ad a. Se il suono proprio della Fig. 2. si fosse scoperto unisono ad A, i tre suoni A, a, e corrisponderebbero esattamente alla teorica, e sarebbero proporzionali ai numeri 1, 2, 3 delle vibrazioni fatte in tempo pari, che stanno inversamente come i tempi 1, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ di una di esse vibrazioni di specie diversa. Egli è di uopo frattanto riflettere, che il tamburo non era perfettamente circolare, ed inclinava alquanto alla figura elittica. Oltre a ciò la pelle non sarà stata fornita in ogni sito di densità, e di grossezza costante; e quindi la differenza di un semituono nella voce grave debba alle mentovate irregolarità attribuirsi.

Schediasma X.

Delle Vibrazioni delle Corde inegualmente grosse, e primieramente di quelle, la cui inegualità grossezza è regolata da una legge costante.

I. Se per trovare i tempi, in cui le corde inegualmente grosse fanno una vibrazione, si va in traccia delle curve, alle quali oscillando si adattano; si incontrano infinite equazioni colle variabili talmente miste e confuse, che non riesce di separarle. Il moto trattorio ce ne somministra, è vero, la costruzione meccanica; ma da questa non si può dedurre col calcolo il valore della costante, la cui radice divisa per la radice della lunghezza del pendolo a secondi si agguaglia al tempo di una vibrazione delle corde predette. Per vedervi più addentro nella materia, cerchiamo l'equazione della curva, a cui si accomoda una corda di grossezza variabile, mentre si vibra.

II. Sia AA' (fig. 2.) una corda di grossezza variabile; si domanda a qual curva $ACFC'A'$ oscillando si adatterà. Si chiamino, come nel precedente Schediasma IX. $AA' = L$, $AH = x$, $HK = dx$, $HD = y$, la massima ordinata $CF = c$, il raggio osculatore $ID = IC = r$, e di più si esprima per M la massa della corda, per P la forza che la tende, e finalmente per f la forza, che sollecita la particola $DC = dx$ per la direzione CK. Collo stesso metodo posto in opera nel mentovato Schediasma al numero V. si scoprirà $f = \frac{Pdx}{r}$: e ma prendendo dx costante, e supponendosi dy minima rispettivamente a dx, $r = \frac{dx^2}{-ddy}$; dunque $f = -\frac{Pddy}{dx}$.

La

Schediasma X.

La grossezza variabile della corda si eguagli alla funzione φx dell'assissa $AH = x$, ed il volume della particola Hk pareggerà la grandezza $\varphi x . dx$. La sommatoria di questa formola, quando $x = AA' = L$, mi rende noto il volume della corda totale, ch'io chiamo $V = \int \varphi x . dx$. Inoltre $V : \varphi x . dx :: M : \frac{M \varphi x . dx}{V}$, ed il quarto termine dell'analogia ci dà la misura della massa spettante all'elemento Dd della corda.

Dividendo la forza sollecitante $f = -\frac{P ddy}{dx}$ per la detta massa, ne risulta la forza acceleratrice $\frac{Vf}{M\varphi x . dx} = \frac{-VP ddy}{M\varphi x . dx^2}$; la quale, se tutti i punti della corda $ACZEA'$ hanno da pervenire nel medesimo istante alla retta AA', dee stabilirsi proporzionale all'ordinata $HD = y$, onde ne provenga l'equazione $-\frac{VP ddy}{M\varphi x . dx^2} = \frac{y}{a}$, o sia l'equivalente $-\frac{aVP ddy}{My} = \varphi x . dx^2$ (1.). Fatta la grandezza $\frac{aVP}{M} = g$ (2.); la nostra formola si riduce alla seguente $-\frac{g ddy}{y} = \varphi x . dx^2$ (3.)

III. Si ridurrà una tal formola alle prime differenze, ponendo $\log . y = v$ nel ramo delle ordinate decrescenti della logistica riferita al protonumero c, la cui suttangente $= 1$, e la base $= a$, onde si abbia $y = c\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{-v}{c}}$. Il calcolo ci insegnerà essere $\frac{ddy}{y} = -ddv + dv^2$, valore, che sostituito nella formola (3.) la trasforma così

$g \cdot \overline{ddv + dv^2} = \varphi x . dx^2$ (4.). Metto $dv = z dx$, ed ho differenziando $ddv = dz\, dx$. Colloco nella equazione (4.) in vece di dv, e di ddv i loro valori, e trovo, fatta la divisione per dx, $-g\,dz - g z^2 dx = \varphi x . dx$ (5.), formola, in cui si sono dileguate le seconde differenze.

IV. Pongasi $\varphi x = \frac{G^2 x^m}{k^m}$, e ne risulterà $-g\,dz - g z^2 dx = \frac{G^2 x^m dx}{k^m}$ (6.), nella qual formola si separano le variabili, quando sia $m = 0$, $m = -4$, $m = -\frac{4}{3}$, $m = -\frac{8}{3}$, $m = -\frac{8}{5}$, $m = -\frac{12}{5}$, $m = -\frac{12}{7}$, $m = -\frac{16}{7}$, $m = -\frac{16}{9}$, e generalmente $m = \frac{-4n}{2n \pm 1}$, preso per n un qualunque numero intero, e positivo, il quale cominci dal zero, e seguiti per la serie dei numeri naturali.

Si può anche stabilire $\varphi x = G^2 . \frac{\overline{k \pm x}^m}{k^m}$, e si ottiene la separazione delle indeterminate, qualora ad m si adattino i mentovati valori. Imperciocchè usata la sostituzione $k \pm x = q$, ci si presenterà $-g\,dz \mp g z^2 dq = \pm \frac{G^2 q^m dq}{k^m}$, che è un'equazione simile alla (6.).

Attribuita a φx la detta grandezza, ed essendo $m = \frac{-4n}{2n \pm 1}$, si potranno mediante la separazione delle variabili costruire la curva, in cui si ripiegario nell'atto di vibrarsi la nostra corda. Negli altri casi riescirà opportuno il ricorrere al moto trattorio, dal quale per altro non si raccoglierà, salvochè meccanicamente la grandezza della costante g. I settori componenti la pelle del tamburo si possono considerare come corde, la cui grossezza φx accetti la ragione di $\frac{1}{2} L - x$, onde sia

m

$m = 1$; valore, che non si conta fra quelli sopra determinati necessarj per ottenere lo svilupparmento delle variabili. Quindi nel precedente Schediasma IX. mi sarà servito del moto vettorio per delineare la curva, a cui si accomoda la pelle del tamburo oscillando; le quali curve per conseguenza vagliono anche per le corde di grossezza variabile proporzionale ad $L - x$.

Diamo ora gli esempj di varj casi, in cui si separano le variabili.

Esempio I.

Determinare la curva, alla quale si accomoda, mentre si vibra, la corda fornita della grossezza $\frac{G^2K^4}{\overline{K+x}^4}$.

V. Sia la grossezza lungo essa della corda $\varphi x = \frac{G^2K^4}{\overline{K+x}^4}$. Posta $x = 0$, avremo $\varphi x = G^2$, e posta $x = L$, avremo $\varphi x = \varphi L = \frac{G^2K^4}{\overline{K+L}^4}$. Poiché ho determinato al numero II. il volume della corda $V = \int \varphi x \cdot dx$, quando $x = L$, ne risulta $\int \varphi x \cdot dx = \int \frac{G^2K^4 dx}{\overline{K+x}^4} = \frac{G^2K}{3} - \frac{G^2K^4}{3 \cdot \overline{K+x}^3} = G^2K \cdot \frac{3K^2x + 3Kx^2 + x^3}{3 \cdot \overline{K+x}^3}$. Ho aggiunta la costante necessaria, acciocché il volume della corda si annulli, quando $x = 0$. Mettendo $x = L$, scopro $V = \frac{G^2K}{3} - \frac{G^2K^4}{3 \cdot \overline{K+L}^3} = G^2K \cdot \frac{3K^2L + 3KL^2 + L^3}{3 \cdot \overline{K+L}^3}$ (51), volume intero della corda. Questo valore si sostituisca nella formola (n.) $\frac{aVP}{M} = g$,

e ne

e ne nasceva $g = \frac{aG^2pK}{M} - \frac{3K^2L + 3KL^2 + L^3}{3 \cdot \overline{K+L}^3}$ (4)

Nella formola (5.) sostituisco $\frac{G^2K^4}{\overline{k+x}^4}$ in cambio di px, onde si abbia $-gdz - gz^2dx = \frac{G^2K^4dx}{\overline{k+x}^4}$. Pongo $k+x=q$, e mi si presenta l'equazione $-gdz - gz^2dq = \frac{G^2K^4dq}{q^4}$.

Giungeremo alla bramata separazione delle variabili, facendo $-z = -\frac{1}{q} + \frac{p}{q^2}$ (9.), e per conseguenza $z^2 = \frac{1}{q^2} - \frac{2p}{q^3} + \frac{p^2}{q^4}$, e prese le differenze, $-dz = \frac{dq}{q^2} + \frac{dp}{q^2} - \frac{2pdq}{q^3}$. Adempiuta la sostituzione di questi valori, trovo dopo le dovute operazioni $\frac{G^2K^4dq}{gq^2} = \frac{\frac{G^2K^4}{g}dp}{\frac{G^2K^4}{g}+p^2}$

(10.), e passando all'integrazione, $B - \frac{G^2K^4}{gq} =$ Arco Raggio $\frac{GK^2}{\sqrt{g}}$ Tang. p (11.).

VI. Per stabilire la grandezza della costante B, osservo, che qualora nel punto A (Fig. 2.) $y=0$, essere dee infinito $-\frac{dy}{0} = dz = -2dx = -2dq$; dunque $z=\infty$, sopra di che veggasi il numero IX. del citato Schadiasma. La formola $k+x=q$ mi insegna, che nel sito A, ove $x=0$, abbiamo $q=k$; dunque nel detto sito la formola (9.) $-z = -\frac{1}{q}+\frac{p}{q^2}$ prende il seguente aspetto $-z = -\frac{1}{k}+\frac{p}{k^2}$; e perciò sendo $z=\infty$, si comprende esser tale anche p. Ora la tangente $p=\infty$, quando l'arco di circolo pareggia un quadrante. Chiamato b il quadrante del raggio c, sarà $\frac{bGK^2}{c\sqrt{g}}$ il quadrante del raggio $\frac{GK^2}{\sqrt{g}}$, e perciò in riguardo al punto

A

Schediasma X.

A avremo $B = \frac{G^3K^3}{g} \pm \frac{bGK^2}{c\sqrt{g}}$, e conseguentemente $B = GK^2 \cdot \overline{\frac{GK}{g} \pm \frac{b}{c\sqrt{g}}}$. Colla sostituzione di questo valore l'equazione (11) si trasforma così

$$GK^2 \cdot \overline{\frac{b}{c\sqrt{g}} + \frac{GK}{g} - \frac{GK^2}{gy}} = \text{Arco Ragg. } \frac{GK^2}{\sqrt{g}} \text{ Tang. } p \quad (12.)$$

Rimane, che si determini la costante g. Nel punto A' abbiamo $y = k+d$, $y = 0$, $p = \infty$. Sarà la tangente p infinita (lasciato da parte il caso testè notato relativo al punto A, in cui l'arco pareggia un quadrante) qualunque volta l'arco mentovato si agguaglia a quadranti 3, 5, 7, 9 &c. Espresso per n qualsisia termine della serie 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c., il termine generale della progressione 3, 5, 7, 9 &c. verrà dinotato dalla quantità $2n+1$. Scriveremo pertanto

$$GK^2 \cdot \overline{\frac{b}{c\sqrt{g}} + \frac{GK}{g} - \frac{GK^2}{g \cdot \overline{k+d}}} = \overline{2n+1} \cdot \frac{bGK^2}{c\sqrt{g}}, \text{ e}$$

ridotto che sia il computo, $g = \frac{c^2G^2d^2k^2}{4n^2b^2 \cdot \overline{k+d}^2}$ (13.)

Sostituito questo valore nella formola (12.), onde prende il seguente aspetto

$$\frac{b}{c} \cdot \frac{2nb \cdot \overline{k^2+kd}}{cd} + \frac{4n^2b^2 \cdot \overline{k^2+kd}^2}{c^2d^2 \cdot k} - \frac{4n^2b^2 \cdot \overline{k^2+kd}^2}{c^2d^2 \cdot y}$$

$$= \text{Arco Raggio } \frac{2nb \cdot \overline{k^2+kd}}{cd} \text{ Tang. } p \text{ ; e po=}$$

nendo il raggio $\frac{2nb \cdot \overline{k^2+kd}}{cd} = C$ (14.),

$$\frac{bC}{c} + \frac{C^2}{k} - \frac{C^2}{y} = \text{Arco Raggio } C \text{ Tang. } p \; (15.).$$

VII. Ora passo a costruire la curva, in cui si ripiega la nostra corda. Tiro l'indefinita $A'B'$ (Fig. 6.), ed in essa

segno

segno $A'A = d$; $AB = k$, $Bd = dA' = C =$ $\frac{nn6 \cdot k^2 + kd}{cd}$. Fatto centro in d, col raggio dB descrivo il arcolo $B'OBO'B'$, e poscia per i punti B', B, A, A' delineo le normali all' infinito prolungate $M'B'nM'$, $MBnM$, QAP, $A'P'Q'$. Sia $DRD'P'$ un' iperbola Apolloniana, nella quale qualunque rettangolo $BK \cdot KD = C^2$. Se sia l' assissa $BK = q$, si troverà la corrispondente ordinata $KD = \frac{C^2}{q}$. Segno l' arco $B'OBO'T = \frac{6C}{c} + \frac{C^2}{k}$ ed osservo, che quando k sia positiva, il detto arco è sempre maggiore di quadranti $1+nn$, e per conseguenza l' arco $OBO'T = \frac{C^2}{k}$ (tagliato $B'O$ uguale ad un quadrante) maggiore di quadranti nn. E voglia il vero $\frac{C^2}{k} = \frac{6C}{c} \cdot \frac{cC}{6k}$; ma per la formola (14.) $\frac{cC}{6k} = nn \cdot \frac{k+d}{d}$; dunque $\frac{C^2}{k} = \frac{6C}{c} \cdot nn \cdot \frac{k+d}{d}$, quantità sempre maggiore di $\frac{6C}{c} \cdot nn$. La figura 4. l' ho adattata al caso di $n = 1$; e di $k = \frac{d}{4}$, il quale mi dà $\frac{C^2}{k} = \frac{6C}{c} \cdot n\frac{1}{n}$.

Presa ad arbitrio l' arco $B'OBN = \frac{6C}{c} + \frac{C^2}{k} - \frac{C^2}{q}$, a cui si riferisca la tangente $B'H = \rho$, sarà l' arco $TO'N = \frac{C^2}{q}$. Si determini la linea BM uguale a questo arco, e tirata MD parallela a BA', intersecherà l' iperbola $DD'P'$ nel punto D, per cui condotta DK parallela ad MA, avremo per la natura di essa curva $BK = q$. Rese note in tal guisa le due linee relative

$B'H$

$B'H = p$; $BK = q$, la formola (9.) $z = -\frac{1}{q} + \frac{p}{q^2}$ manifesterà il valore di z, a cui fatta uguale l'ordinata KG, il punto G apparterrà alla curva $QGCG'Q'$, le coordinate della quale $BK = q$, $KG = z$. Dalla formola (9) raccogliesi, che $z = 0$ richiede la condizione $p = q$. Se dunque l'arco $TO'I = CR$ sarà tale, che si abbia $B'S = p$ $= BC = q$, l'ordinata $KG = z$ si annullerà nel punto C. Ciò succederà tante volte, quante unità si contano in n. Nella figura 4. z svanisce una sola volta; perchè supponesi $n = 1$, e le linee AQ, $A'Q$ servono di assintoti ai due rami CGQ, $CG'Q'$. Per altro sarà generalmente n il numero delle coppie dei predetti rami, ed AQ, $A'Q'$ gli assintoti dei rami estremi.

Si aja $CGK = \int -zdq = v = \log. y$ nella logistica della suttangente 1 riferita al protonumero $= c$ pel numero III. Si ricorra dunque alla predetta logistica, ed il numero, che nel ramo delle ordinate decrescenti corrisponde al logaritmo CGK, pareggerà l'ordinata $KQ = y$ della curva $AQ7Q'A'$, a cui si accomoda la nostra corda, mentre si vibra. Al punto C conviene l'ordinata massima $C7 = c$; perchè quivi $CGK = \log. y = \log. c = 0$. Nei punti A, A' CGK, ovvero $CG'K' = \infty$, e per conseguenza $y = 0$. Supponendosi nella figura 4. $n = 1$, la curva è fornita di un ventre solo. Sarà pertanto n il numero dei ventri collocati a vicenda, uno dalla parte delle ordinate

per

per esempio positiva, ed il vicino da quella della ordinata negativa.

VIII. Giudico confacente lo indagare i valori delle assissa $BK = q$; quando $KQ = y = 0$. Ho stabilito al numero VI., che y si annulla, qualora l'arco B'ON si aguaglia a quadranti 3, 5, 7, 9, 11 &c. Se n = 1, è soltanto y = 0 nel punto estremo A' della corda, quando il predetto arco pareggia 3 quadranti. Se n = 2, corrisponde y = 0 ai numeri di quadranti 3, 5; e la curva ha due ventri. Si riferisce y = 0 ai numeri di quadranti 3, 5, 7, posto n = 3; e la curva ha tre ventri. Generalmente la curva è fornita del numero n di ventri, ed ogni volta che il mentovato arco si aguaglia a quadranti 3, 5, 7, 9 &c. 2n+1, abbiamo y = 0.

Quindi scopriremo il punto di quiete, o nodo più vicino al punto A, ponendo nella formola (15.) Arco Rag. C Tang. $p = \frac{3bC}{c}$, onde si abbia $\frac{bC}{c} + \frac{C^2}{k} - \frac{C^2}{q} = \frac{3bC}{c}$, e fatti i dovuti calcoli; $q = k + \frac{2bk^2}{cC - 2bk} = k + \frac{kL}{n.\overline{k+L} - L}$, sostituendo in vece di C il suo valore somministrato dalla formola (14.) $C = \frac{2nb.\overline{k^2 + kL}}{cL}$.

La equazione $\frac{bC}{c} + \frac{C^2}{k} - \frac{C^2}{q} = \frac{5bC}{c}$ serve a scoprire la distanza del secondo nodo dal punto B, dandoci $q = k + \frac{4bk^2}{cC - 4bk}$

$= k + \frac{2kL}{n.\overline{k+L} - 2L}$.

Il terzo nodo si allontanerà dal punto B per la misura $q = k + \frac{6bk^2}{cC - 6bk}$

=

$= k + \frac{3kL}{n \cdot \overline{k+L} - 3L}$.

Dal proseguimento della serie viene determinata la distanza dell'ultimo nodo n dal punto B, cioè $BA' = k + \frac{nkL}{n \cdot \overline{k+L} - nL}$ $= k+L$.

Giacchè $BA = k$, la lontananze dei nodi dal punto A ci sono manifestate dalla seguente progressione.

$\frac{kL}{n \cdot \overline{k+L} - L}$, $\frac{2kL}{n \cdot \overline{k+L} - 2L}$, $\frac{3kL}{n \cdot \overline{k+L} - 3L}$ &c.

$\frac{nkL}{n \cdot \overline{k+L} - nL} = L$.

Trovare il tempo di una vibrazione della corda, la cui grossezza $\frac{G^2k^4}{\overline{k+x}^4}$.

IX. Dalle due formole (8) $g = \frac{aG^2pk}{M} \cdot \frac{3k^2L + 3kL^2 + L^3}{3 \cdot \overline{k+L}^3}$, (13.) $g = \frac{c^2G^2L^2k^2}{4n^2b^2 \cdot \overline{k+L}^2}$ si deduce il valore della costante $a = \frac{c^2}{4n^2b^2} \cdot \frac{LM}{p} \cdot \frac{3k^2 + 3kL}{3k^2 + 3kL + L^2}$ (16.). Posta $k = \infty$, la grossezza della corda $\frac{G^2k^4}{\overline{k+x}^4}$ diviene costante $= G^2$. In tal circostanza pertanto $a = \frac{c^2}{4n^2b^2} \cdot \frac{LM}{p}$, conforme realmente richiedono le corde ugualmente grosse.

Al numero XXII. del precedente Schediasma IX. ho dimostrato che essendo come nel nostro caso $\frac{y}{a}$ la forza acceleratrice, segue una vibrazione nel

tempo

tempo $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$ misurato in secondi, esprimendo h la lunghezza del pendolo, che fa una vibrazione per secondo in Parigi, la qual cosa in riguardo alla nostra corda

$$t = \frac{c}{2ub}\sqrt{\frac{LM}{ph}\cdot\frac{3k^2+3kL}{3k^2+3kL+L^2}} \quad (13.)$$

Fra i molti corollarj, che potrei dedurre, mi ristringerò a due.

La stessa corda, la cui grossezza $\frac{G^2k^4}{\overline{k+x}^4}$, secondochè si conforma a figura di venti 1, 2, 3, 4, ecc., oscillerà in tempi, che staranno come 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ecc.: proprietà, che alle corde ugualmente grosse altresì compete.

Le corde simili deggiono avere le grossezze omologhe come L^2: e perchè pel numero V. le massime grossezze si eguagliano a G^2, sarà G proporzionale ad L, e lo stesso parimente dee avverarsi di k, onde il volume $V = G^2k\cdot\frac{3k^2L+3kL^2+L^3}{3\cdot\overline{k+L}^3}$ accetti la proporzione di L^3, come richiedono i corpi simili. Avremo dunque, attribuendo ad u lo stesso valore, t come $\sqrt{\frac{LM}{p}}$. Che se in oltre siano formate della medesima materia, dimodochè la massa M stia come L^3, e di più la forza tendente p riceva la ragione dalle grossezze analoghe, e stia come G^2, o come L^2, scopriremo il tempo t come L, la qual legge è comune a tutti i corpi simili, della stessa materia, ed ugualmente elastici.

X. Se alla grossezza della corda si

appropriasse

appropriasse la espressione $\frac{G^2k^4}{\overline{k-x}^4}$, la corda farebbe una vibrazione nel tempo

$$t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{LM}{Dh}\cdot\frac{3k^2-3kL}{3k^2-3kL+L^2}} \quad (14.)$$

~~[illegible]~~ Egli è di uopo che sia $k > L$. In sì fatta ipotesi la minima grossezza G^2 corrisponde ad $x = 0$, e la massima $\frac{G^2k^4}{\overline{k-L}^4}$ ad $x = L$, e queste grossezze stanno amendue dentro i limiti del finito. È di mestieri poi altro assegnare a k una tale misura, che la massima grossezza $\frac{G^2k^4}{\overline{k-L}^4}$ non si opponga alla flessibilità della corda.

Ponendo $k < L$, ~~[illegible]~~ ad $x = 0$ si riferisca la grossezza finita G^2, ad $x = L$ la grossezza finita $\frac{G^2k^4}{\overline{k-L}^4}$: ma quando $x = k$, la grossezza $\frac{G^2k^4}{\overline{k-x}^4} = \frac{G^2k^4}{0}$ ascende all'infinito.

infinito, proprietà fisicamente ripugnante.

esempio II.

Determinare la curva, in cui si ripiega nell'oscillare la corda fornita dalla grossezza $\frac{G^2k^2}{\overline{k+x}^2}$.

XI. Venga proposto di trovare la curva, a cui si accomoda una corda fornita dalla grossezza $\frac{G^2k^2}{\overline{k+x}^2}$. La formola $\int\frac{G^2k^2dx}{\overline{k+x}^2}$ ci dà il volume della corda relativo all'ascissa x eguale a $G^2k - \frac{G^2k^2}{k+x} = \frac{G^2kx}{k+x}$. Ho aggiunta la costante opportuna, onde il detto volume si annulli posta $x=0$. Fatta $x = L$, trovo $V = \frac{G^2kL}{k+L}$ (19.) volume intero della nostra corda. Questo valore si sostituisca nella formola (2.) $\frac{aVP}{M} = g$, e ne risulterà $g = \frac{aPG^2kL}{M.\overline{k+L}}$ (20.)

Nella formola (5) sostituisco $\frac{G^2k^2}{\overline{k+x}^2}$ in cambio di φx, ed ho $-g\,dz - gz^2dx = \frac{G^2k^2dx}{\overline{k+x}^2}$. Pongo $k+x = q$, e mi si affaccia l'equazione $-g\,dz - gz^2dq = \frac{G^2k^2dq}{q^2}$. Otterremo la separazione delle variabili, mettendo $z = -\frac{G^2k}{pq}$. Questa formola ci mostra a dito, che a z positiva dee corrispondervi p negativa, o al contrario. Prese le differenze, avremo $dz = G^2k.\frac{p\,dq+q\,dp}{p^2q^2}$, ed effettuata la sostituzione di tali valori, troveremo dopo le convenienti operazioni

dp

$$\frac{dp}{p^2+\frac{gp}{k}+gG^2} = -\frac{k}{g}\cdot\frac{dq}{q}\text{, o sia}$$

$$\frac{\overline{gG^2-\frac{g^2}{4k^2}}\cdot dp}{-\overline{p-\frac{g}{2k}}^2+gG^2-\frac{g^2}{4k^2}} = \frac{k}{g}\cdot \overline{gG^2-\frac{g^2}{4k^2}}\cdot -\frac{dq}{q}.$$

Nell'estrarre la radice del quadrato $p^2+\frac{gp}{k}+\frac{g^2}{4k^2}$ ho posto in uso il segno negativo, acciocchè a z positiva si riferisca p negativa: veggasi la costruzione al numero XIV. Faccio $gG^2-\frac{g^2}{4k^2}=C^2$, ed ho

$$\frac{C^2dp}{-\overline{p-\frac{g}{2k}}^2+C^2} = \frac{kC^2}{g}\cdot -\frac{dq}{q}\ (21.)$$ ed integrando,

$$\text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \overline{-p-\frac{g}{2k}} - B = \frac{kC^2}{g}\cdot \log.\frac{k}{q}\ (22.)$$

nella logistica della suttangente 1 riferita al protonumero k.

XII. Per determinare la grandezza della costante B, ho già notato nello Schediasma IX. al numero X., che nel punto A (Fig. 2.) esser dee $z=\infty$. Dalla formola $k+x=q$ si raccoglie, che nel sito A, dove $x=0$, abbiamo $q=k$; e quindi nel detto sito la formola $-z=\frac{G^2k}{pq}$ diviene $-\infty=\frac{G^2}{p}$, e mi addita dover essere $p=0$. Scopriremo pertanto

$$\text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } -\frac{g}{2k} - B = \frac{kC^2}{g}\cdot\log.k = 0,$$

e conseguentemente $B = \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } -\frac{g}{2k}$

Sostituito questo valore, la equazione (22.) si trasforma così

Arco

Arco rag. C Tang. $\overline{-p-\frac{g}{2k}}$ − Arco rag C Tang. $\frac{-g}{2k}$

$= \frac{kC^2}{g} \cdot \log. \frac{k^2}{q} = \frac{kC^2}{g} \cdot -\log. q$ (23.).

Mi inoltro a stabilire la costante g. Nel punto A′ abbiamo $q = k+h$, $z = \infty$, e giacchè $z = -\frac{G^2k}{pq}$, ne risulta $\infty = \frac{-G^2k}{p \cdot k+h}$, il che richiede $p = 0$. Gli Archi rag. C Tang $\overline{-p-\frac{g}{2k}}$ nei due siti A, A′, nei quali $p = 0$, hanno la stessa tangente; e perciò possono differire pel numero di semicircoli espresso dalla seguente serie 1, 2, 3, 4, &c., o sia pel numero n di semicircoli, dinotando n qualunque termine della serie predetta. Se b significhi il quadrante del raggio c, sarà $\frac{2bC}{c}$ il semicircolo del raggio C, ed i mentovati archi potranno differire per $\frac{2nbC}{c}$. Il perchè avremo nel punto A′

Arco rag. C Tang. $\overline{-p-\frac{g}{2k}}$ = Arco rag. C Tang. $\frac{-g}{2k}$ + $\frac{2nbC}{c}$ (intendendo per Arco rag. C Tang. $\frac{-g}{2k}$ quello, che compete al punto A) e quindi Arco rag. C Tang. $\overline{-p-\frac{g}{2k}}$ − Arco rag. C Tang. $\frac{-g}{2k}$

$= \frac{2nbC}{c} = \frac{kC^2}{g} \cdot \log. \frac{k^2}{k+h}$. Dividendo per C, moltiplicando per g, ed alzando al quadrato, trovo $\frac{4n^2b^2g^2}{c^2k^2} = C^2 \cdot \overline{\log. \frac{k^2}{k+h}}^2$; e sostituendo in vece di C^2 il suo valore, $\frac{4n^2b^2g^2}{c^2k^2} = gG^2 - \frac{g^2}{4k^2} \cdot \overline{\log. \frac{k^2}{k+h}}^2$, equazione, da cui si raccoglie $g = \frac{G^2k^2 \cdot \overline{\log. \frac{k^2}{k+h}}^2}{\frac{4n^2b^2}{c^2} + \frac{1}{4}\overline{\log. \frac{k^2}{k+h}}^2}$ (24.).

Posto $n = \infty$, si avrebbe $g =$

$G^2k^2c^2$

Schediasma X.

$\frac{G^2k^2c^2}{4n^2b^2}\cdot\overline{\log.\frac{k^2}{k+L}}^2$, e posto $k=\infty$, onde la grossezza della corda $\frac{G^2k^2}{\overline{k+x}^2}=G^2$ divenga costante, e $\log.\frac{k^2}{k+L}=-\log.\overline{k+L}$ si agguagli ad $\frac{L}{k}$, si scoprirebbe $g=\frac{c^2L^2G^2}{4n^2b^2}$, conforme esigono le corde costantemente grosse.

XIII. Sia (fig. 9.) $BA=k$, $AA'=L$, e col mezzo della formula $\frac{2mbC}{c}=\frac{kC^2}{g}\cdot\log.\frac{k^2}{g}$ si stabiliscono le distanze dei nodi, o punti in quiete dal punto B, le quali convengono ai varj valori di m. Quando $m=o$, esser dee $\log.\frac{k^2}{g}=o=\log.k$, e per conseguenza $g=k=BA$, il che determina il punto A. Si metta poscia m eguale ad 1, 2, 3, &c. n, e si scopriranno le distanze dal punto B dei nodi 1, 2, 3, &c. n, e quest'ultima lontananza sarà $BA'=k+L$. Dividendo per C, ne risulta $\frac{2mb}{c}=\frac{kC}{g}\cdot\log.\frac{k^2}{g}$: ma $C=\sqrt{gG^2-\frac{g^2}{4k^2}}$; dunque

$$\frac{2mb}{c}=k\sqrt{\frac{G^2}{g}-\frac{1}{4k^2}}\cdot\log.\frac{k^2}{g},$$

e sostituito in cambio di g il suo valore;

$$\frac{2mb}{c}=\sqrt{\frac{\frac{4n^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\overline{\log.\frac{k^2}{k+L}}^2}{\overline{\log.\frac{k^2}{k+L}}^2}-\frac{1}{4}}\;\log.\frac{k^2}{g}$$

$$=\frac{2nb}{c\log.\frac{k^2}{k+L}}\cdot\log.\frac{k^2}{g},$$ e per conseguenza

$\frac{m}{n}$

$\frac{m}{n} \log. \frac{k^2}{k+l} = \log. \frac{k^2}{g}$. E poichè $\log. \frac{k^2}{k+l} = -\log. \overline{k+l}$, $\log. \frac{k^2}{g} = -\log. g$, avremo $\frac{m}{n} \log. \overline{k+l} = \log. g$.

Questa formola mi insegna doversi dividere $\log. \overline{k+l}$ in tante parti, quante unità si contengono in n, e prenderne poi 1, 2, 3, 4, &c. n di queste parti per avere il $\log. g$. Ho già detto, che se $m=0$, abbiamo $g=k$; se $m=n$, abbiamo $g=k+l$. Gli altri valori di g ci li somministrerà il numero $n-1$ di medie proporzionali fra k, e $k+l$. Ecco dunque i valori di g, ai quali corrispondono i nodi
$k = k^{\frac{n}{n}} \cdot \overline{k+l}^{\,0}$, $k^{\frac{n-1}{n}} \cdot \overline{k+l}^{\frac{1}{n}}$, $k^{\frac{n-2}{n}} \cdot \overline{k+l}^{\frac{2}{n}}$, &c. $k^{\frac{n-n}{n}} \cdot \overline{k+l}^{\frac{n}{n}} = k+l$.

Si avranno le distanze dei nodi dal punto A, sottraendo dai sovrapposti valori di g la quantità k.

XIV. Ora mi accingo a dare la costruzione di una delle curve, a cui si accomoda oscillando la nostra corda, e scelgo quella, che è di due ventri fornita. Nella retta A'B' (fig. 9a) taglio $A'A = L$; $AB = k$, $BS = k^{\frac{n-1}{n}} \cdot \overline{k+l}^{\frac{1}{n}} = \sqrt{k^2+kl}$; $BL = LB' = C = \sqrt{gG^2 - \frac{g^2}{4k^2}}$. Col raggio LB descrivo il circolo BOB'O'B, e poscia per i punti B, A, S, A' conduco le normali all'infinito prolungate MBM', RARX, rQSQ', A'rQ'. Sia ADRP la logaritmica dalla suttangente $\frac{kC^2}{g} = kG^2 - \frac{g}{4k} =$

$\dfrac{16 n^2 b^2 k G^2}{16 n^2 b^2 + c^2 \log.\dfrac{k^2}{k+k}}$, $BA = k$ il protonumero, $BK = g$ i numeri, e KD i logaritmi. Se $-\log. g$ esprima il logaritmo nella logistica della suttangente $= 1$, avremo $KD = \dfrac{kc^2}{g} - \log. g$. Segno $BH = \dfrac{-g}{2k}$, e tiro la secante LNH, che determina l'arco corrispondente BN. Faccio di poi l'arco $NI = KD$, e condotta la secante LIT, mi insegna la formola

(23) $\text{Arco rag. C Tang. } \overline{\dfrac{-g}{2k} - p}$

$- \text{Arco rag. C Tang. } \dfrac{-g}{2k} = \dfrac{kc^2}{g} - \log. g$,

ossia $HT = -p$.

Rese note con tal mezzo le linee corrispondenti $BK = g$, $HT = -p$, dalla equazione $z = -\dfrac{G^2 k}{pg}$ raccolgo il valore relativo di z, a cui si agguagli la linea $KG = z$. Mi è dunque concesso di descrivere la curva $Q\,G\,C\,G'\,Q'$, $rQ\,rG\,rC\,rG'\,rQ'$, le cui coordinate $BK = g$, $KG = z$. Se come suppongo $n = a$, la nostra curva è composta di quattro rami, cioè di rami an, QGC, $CG'Q'$, $rQ\,rG\,rC$, $rC\,rG'\,rQ'$, ai quali servono di assintoti le linee AQ, $S'Q'$, $S\,rQ$, $A'\,rQ'$. I punti C, rC, ove $z = 0$, si stabiliscono riflettendo che giusto l'equazione $z = -\dfrac{G^2 k}{pg}$ e $\pm z = 0$ dee riferirsi $\mp p = \infty$. Nella supposizione di $n = a$ ciò succede, quando

Arco

$$\text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \overline{\frac{-g}{2k}} - p - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{-g}{2k}$$

$$\begin{cases} = \frac{6C}{c} - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{-g}{2k} = NO'. \\ = \frac{36C}{c} - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{-g}{2k} = NO'B'O. \end{cases}$$

Fatta dunque $AX = NO'$, $A2X = NO'B'O$, e condotte le linee XK, $2X2K$ parallele ad AA', che taglino la logistica ADP nei punti K, $2K$, e tirate KC, $2K2C$ normali ad AA', nei punti C, $2C$ sarà $z=0$.

Poichè si aja $CGK = \int -2dg = v = \log. y$ nella logistica della suttangente 1, e preso c come protonumero, il numero, che nel ramo delle ordinate decrescenti corrisponde al logaritmo CGK, si agguaglierà all'ordinata $KC = y$ della curva $AC7S2 7A'$, in cui si ripiega la nostra corda, qualora $n=2$. Ai punti C, $2C$ compete l'ordinata massima $C7 = c$, $2C27 = -c$; perchè in essi si aja $CGK = \int -2dg = v = \log. y = \log. c = 0$. Nei punti A, S, A' $\int -2dg = \infty$ positivo, o negativo, e perciò $y=0$.

Trovare il tempo, nel quale si vibra la corda, la cui grossezza $\frac{G^2 K^2}{K+x^2}$.

XV. Dal paragone delle due formole
$$(20)\ g = \frac{aPG^2KL}{M \cdot K+L}, \quad (24)\ g = \frac{G^2K^2 \cdot \log. \frac{K^2}{K+L}}{\overline{\frac{4n^2b^2}{c^2} + \frac{1}{4}\log. \frac{K^2}{K+L}}^2}$$

si deduce $a = \frac{M \cdot \overline{K^2+KL} \cdot \log. \frac{K^2}{K+L}}{PL \cdot \overline{\frac{4n^2b^2}{c^2} + \frac{1}{4}\log. \frac{K^2}{K+L}}^2}$ (25).

e

E conciossiachè pel numero XXII. dello Schediasma IX. $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, si scopre vibrarsi la nostra corda nel tempo

$$t = \sqrt{\frac{M \cdot \overline{k^2+kL} \cdot \log.\frac{k^2}{k+L}}{hPL \cdot \frac{4n^2b^2}{c^2} + \frac{1}{4}\log.\frac{k^2}{k+L}^2}}\text{, ovvero}$$

ponendo $\log.\overline{k+L}^2$ invece di $\log.\frac{k^2}{k+L}$,

$$t = \sqrt{\frac{M \cdot \overline{k^2+kL} \cdot \overline{\log.k+L}^2}{hPL \cdot \frac{4n^2b^2}{c^2} + \frac{1}{4}\overline{\log.k+L}^2}} \quad (26.)$$

Quando $n = \infty$, ne risulta

$$t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{M \cdot \overline{k^2+kL} \cdot \overline{\log.k+L}^2}{hPL}}.$$

Che se fosse $k = \infty$, la corda sarebbe fornita della grossezza costante $\frac{G^2k^2}{\overline{k+x}^2} = G^2$, e $\overline{\log.k+L}^2$ si agguaglierebbe ad $\frac{L^2}{k^2}$. Sostituito questo valore, e cancellati i termini rispettivamente nulli, la formola (26.) prende il seguente aspetto adattato alla corda ugualmente grossa

$$t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{ML}{hP}}.$$

Una conseguenza importante dobbiamo raccogliere dalla formola (26.), cioè che alla corda, la cui grossezza $\frac{G^2k^2}{g^2}$, non compete la proprietà, secondochè i suoi ventri sono 1, 2, 3, 4, &c., che i tempi di una vibrazione serbino la proporzione delle frazioni $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. Si

assegnino

assegnino per esempio a K, e ad L tali misura, onde ne provenga $\frac{4b^2}{c^2} = \frac{1}{4} \overline{\log. K+L}^2$, o sia $\frac{4b}{c} = \log. \overline{K+L}$, ed attribuiti ordinatamente ad n i valori 1, 2, 3, 4, &c., troveremo t proporzionale ai termini della sottoposta serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{17}},\ \frac{1}{\sqrt{26}},\ \&c.,$$

che generalmente si esprimono per $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

Poche sono le corde inegualmente grosse, che godano della mentovata prerogativa; e quindi a buon conto non dobbiamo maravigliarci, se una corda di grossezza variabile renda un suono poco grato nascente da una sensibile mescolanza di suoni, che in proporzioni troppo composte si corrispondono.

Se la nostra corda si adatterà ad una delle figure da me determinate, renderà un suono solo, e nel tempo t passerà da uno stato all'altro di quiete. Ma incitando al moto essa corda, sarebbe una combinazione assai rara, che mediante una pronta comunicazione laterale di moto, la corda si accomodasse ad una delle predette figure: Accaderà quasi sempre, che la corda si ripieghi in una curva originata dalla composizione di moltissime curve semplici, e che produca un suono misto dei suoni confacenti alle curve componenti: e perchè i tempi delle vibrazioni di questi suoni si corrispondono in ragioni sorde, la corda non si ridurrà mai

ad

ed uno stato assoluto di quiete, se non quando dalla resistenza verrà estinto il suo moto. Nella corda cilindrica, ed in quella dell'esempio I, ad ogni vibrazione della corda intera, ritorna questa allo stato di quiete, ed essendo i suoni acuti perfettamente unisoni col suono grave, si può dire, che in certa guisa formino un suono solo. Non così nella corda dell'esempio II. Ci sono in essa gli stati di quiete relativi ai suoni diversi, ma non esiste mai uno stato assoluto di quiete; laonde si dà un continuo contrasto fra suoni, che si rispondono in proporzioni esimetre, e quelora i suoni acuti non siano assai fiacchi, ne risulta un aggregato, che non può riuscire aggradevole.

XVI. Espressa la grossezza della corda per $\frac{G^2K^2}{\overline{K-x}^2}$, si vibrerebbe essa corda nel tempo $t = \sqrt{\frac{M.\overline{K^2-KL}.\overline{\log.K-L}^2}{hPL.\frac{4n^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\overline{\log.K-L}^2}}$ (27.)

Per isfuggire gli inconvenienti, egli è necessario, che sia $K > L$. Supposto $K < L$, si applichi al caso presente quello, che ho scritto al numero X., e che si leggerà al numero XXIIII.

Esempio III.

Determinare la curva, alla quale si conforma una corda, la cui grossezza $\frac{G^2K^{\frac{4}{3}}}{\overline{K+x}^{\frac{4}{3}}}$.

XVII. Cerco la curva, alla quale si adatta una

una corda, la cui grossezza $\frac{G^2k^{\frac43}}{\overline{k+x}^{\frac43}}$. La $\int\frac{G^2k^{\frac43}dx}{\overline{k+x}^{\frac43}} = 3G^2k - \frac{3G^2k^{\frac43}}{\overline{k+x}^{\frac13}}$, che annullasi posta $x=0$, si agguaglia al volume della nostra corda corrispondente alle ascissa x. Qualora $x=L$, avremo

$V = 3G^2k \cdot \frac{\overline{k+L}^{\frac13} - k^{\frac13}}{\overline{k+L}^{\frac13}}$, volume intero della corda. Sostituisco un tal valore nella formola (r.) $\frac{aVP}{M} = g$, ed ho

$$3\frac{aPG^2k}{M}\cdot\frac{\overline{k+L}^{\frac13} - k^{\frac13}}{\overline{k+L}^{\frac13}} = g \ (n.\,8.)$$

Pongo nella formola (s) $\frac{G^2k^{\frac43}}{\overline{k+x}^{\frac43}}$ in luogo di φx, ed ho $-gdz - gz^2dx = \frac{G^2k^{\frac43}dx}{\overline{k+x}^{\frac43}}$, e fatta $k+x = q$, $dx = dq$, ne risulta $-gdz - gz^2dq = \frac{Gk^{\frac43}dq}{q^{\frac43}}$. La sostituzione $-z = \frac1r$, onde si abbia $-dz = -\frac{dr}{r^2}$, trasforma in tal guisa la formola $-\frac{gdr}{r^2} - \frac{gdq}{r^2} = \frac{G^2k^{\frac43}dq}{q^{\frac43}}$. Si faccia $-\frac1z = r = -\frac{gq^{\frac13}}{3G^2k^{\frac43}} + q^{\frac23}p$ (n. 9.) e dopo le necessarie operazioni si giungerà alla formola $\frac{G^2k^{\frac43}p^2dq}{gq^{\frac23}} + \frac{dq}{q^{\frac23}} = -dp$, o sia alla equivalente $\frac{dq}{q^{\frac23}} = \frac{-dp}{\frac{G^2k^{\frac43}p^2}{g}+1}$, che può prendere altresì l'aspetto seguente $\frac{dq}{q^{\frac23}} = \frac{\frac{g}{G^2k^{\frac43}}\cdot -dp}{\frac{g}{G^2k^{\frac43}}+p^2}$. Pongo

$\frac{g}{G^2 k^{\frac{4}{3}}} = C^2$ (30.); ed integrando mi si presenta $B + 3q^{\frac{1}{3}} =$ Arco Rag. C Tang. p.

XVIII. Determineremo il valore della costante B riflettendo, che dovendo essere pel numero X. dello Schediasma IX. $z = \infty$ nel punto A (fig. 9.), avremo in detto sito $v = -\frac{1}{z} = 0$: ma $v = \frac{-g q^{\frac{1}{3}}}{3G^2 k^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}} p$ (29.); dunque $p = \frac{g}{3G^2 k^{\frac{4}{3}} q^{\frac{1}{3}}}$, e giacchè nel mentovato punto $q = k$, sarà $p = \frac{g}{3G^2 k^{\frac{5}{3}}} = \frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$. Quindi $B =$ Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}} - 3k^{\frac{1}{3}}$, e perciò il vero integrale sarà $3 \cdot \overline{q^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}$ = Arco Rag. C Tang. p − Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$ (31.) *

Passo a stabilire la grandezza della costante g. In riguardo al punto A abbiamo Arco Rag. C Tang. p − Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$ $= 0$. Rispettivamente al punto A', in cui esser dee $v = -\frac{1}{z} = 0$, si averà l'equazione $p = \frac{g}{3G^2 k^{\frac{4}{3}} \overline{k+l}^{\frac{1}{3}}} = \frac{C^2}{3 \cdot \overline{k+l}^{\frac{1}{3}}}$ dedotta dalla formola (29.), ponendo in essa in cambio di q il suo valore $k+l$; laonde Arco Rag. C Tang. p = Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3 \cdot \overline{k+l}^{\frac{1}{3}}}$.

Col raggio $LB = C = \frac{\sqrt{g}}{G k^{\frac{2}{3}}}$ (fig. 10.) descrivasi il circolo $B O B' O' B$, e condotta al punto B la toccante $M B M'$, si taglino $BH = \frac{C^2}{3 \cdot \overline{k+l}^{\frac{1}{3}}}$, $BR = \frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$, e si tirino le secanti LH, LR,

* Fatta la riflessione, che $3 \cdot \overline{q^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}$ è sempre quantità positiva, quando $q > k$, si inferisca dover esser tale l'omogeneo di comparazione, il che necessariamente richiede, che nel nostro caso si considerino come positivi gli archi, che si riferiscono alle tangenti da principio negative. E poichè gli archi relativi alle tangenti da principio negative, che si prendono in qualità di positivi, si eguagliano agli archi positivi, che corrispondono ad equali tangenti, che nella loro origine son positive; io in seguito mi servirò della formola $3 \cdot \overline{q^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}$ = Arco Rag. C Tang. p − Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$ (31.); perchè nella conseguenza si accorda con quella, che dall'analisi mi viene somministrata.

che

che determinino gli archi BN, BI.
Il semicircolo del raggio C si uguaglia a $\frac{2bC}{c}$, e nel punto A' (fig. 2, e 10) dee adempiersi la formola

$$\text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3.\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}} = BN + \frac{2nbC}{c}.$$

Conseguentemente

$$\text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3.\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}} =$$

$$\frac{2nbC}{c} + BN - BI = \frac{2nbC}{c} - NI.$$ Sia $NI = \frac{2bC}{Nc}$, e nel nominato punto A' avremo

$$3.\overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}} = \frac{2bC}{c} . \overline{n - \frac{1}{N}}$$

$$= \frac{2b}{c} . \frac{\sqrt{g}}{Gk^{\frac{2}{3}}} . \overline{n - \frac{1}{N}},$$ da cui si deduce

$$g = \frac{9c^2 . G^2k^{\frac{4}{3}} . \overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}^2}{4b^2 . \overline{n - \frac{1}{N}}^2} \quad (32.)$$

Fingasi $k = \infty$: poichè in tal circostanza sarà $\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{3}} + \frac{L}{3k^{\frac{2}{3}}}$. Inoltre l'arco

$$NI = \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3.\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$$

riuscirà minimo, e per consequenza $\frac{1}{N} = 0$ per adequazione. Per la qual cosa scoprirassi $g = \frac{c^2L^2G^2}{4n^2b^2}$, conforme richiede la corda di grossezza costante G^2 a cui si agguaglia nella ipotesi di $k = \infty$ la grossezza $\frac{G^2k^{\frac{4}{3}}}{\overline{k+x}^{\frac{4}{3}}}$.

Se k è finita, ed $n = \infty$, ci si presenterà $g = \frac{9c^2}{4n^2b^2} . G^2k^{\frac{4}{3}} . \overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}^2$.

XIX. Diamo un saggio della maniera di ridurre a computo il raggio $LB = C$,

e collo stesso incontro, anche l'arco $NI =$ Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3.k^{\frac{1}{3}}}$ — Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3.\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$ $= \frac{r n b C}{Nc}$. Prima d'ogni altra cosa avverto, che l'equazione $\frac{r n b C}{c}$ + Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3.\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$ — Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3.k^{\frac{1}{3}}} = 3.\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}$ si può esprimer così

$\overline{\frac{r n b}{c} + \text{Arco Rag. 1 Tang. } \frac{C}{3.\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. 1 Tang. } \frac{C}{3.k^{\frac{1}{3}}}} . C$ $= 3.\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}$.

Sia $k+L = 4$, $k = 1$, e giacchè $\frac{nb}{c} = \frac{355}{113} = 3,1415929$, avremo nella ipotesi di $n = 1$

$\overline{3,1415929 + A.R.1 T.\frac{C}{6} - A.R.1 T.\frac{C}{3}} . C = 3$. Agevolmente si scopre dover essere a un di presso $C = 1$; col mezzo frattanto delli attenzione ne determinaremo il preciso valore, cioè $C = 1,005223\alpha$, onde si abbia $\frac{C}{3} = 0,3350910$, $\frac{C}{6} = 0,1675455$.

Che questo valore di C sia rettamente determinato, si rende manifesto col seguente computo. Impariamo dalle Tavole, che

l'arco di g.^{di} 18 min. 32 ha la tang. $= 3352424$

l'arco di g.^{di} 18 min. 31 ha la tang. $= 3349144$

Differenza delle predette tangenti $= 3280$

La minore di esse tangenti si sottr. dalla tangente $\frac{C}{3}$, e si troverà

3 3 5 0 9 1 0
3 3 4 9 1 8 8
la loro differenza = 1 7 2 2
Quindi, come può facilmente dimostrarsi, considerando confondersi colla linea retta l'arco di un minuto, ne risulta essere
Arco Tang. 3 3 5 0 9 1 0 = g^{di} 14 min^{ti} 31, $\frac{1722}{32361}$
= g^{di} 14 min^{ti} 31, 5 3 2 2.

Ci insegnano le Tavole stesse, che
l'arco di g^{di} 9 min^{ti} 31 ha la tang. = 1 6 7 6 4 1 6 1
l'arco di g^{di} 9 min^{ti} 30 ha la tang. = 1 6 7 3 4 2 6 1
Differenza delle predette tangenti = 2 9 9 0
Sottro la minore di esse tangenti dalla tangente $\frac{c}{61}$, e scopro 1 6 7 5 4 5 5
1 6 7 3 4 2 6 1
la loro differenza = 2 0 2 9
Averemo pertanto
Arco Tang. 1 6 7 5 4 5 5 = g^{di} 9 min^{ti} 30 $\frac{2029}{2990}$
= g^{di} 9 min^{ti} 30, 6 7 8 6 1.

Gli archi trovati sono
BO = g^{di} 14 min. 31, 5 3 2 1
BN = g^{di} 9 min. 30, 6 7 8 6 1, laonde
NO = g^{di} 9 min. 0 0, 8 5 3 5 = min. 5 4 0, 8 5 3 5. Essendo un semicircolo = g^{di} 1 8 0 = min^{ti} 1 0 8 0 0, esprimeremo l'arco $\frac{NO}{c}$ in parti del raggio = 1 mediante l'analogia
1 0 8 0 0, 0 0 0 0 : 5 4 0, 8 5 3 5 ::
3, 1 4 1 5 9 2 9 = $\frac{26}{c}$: 0, 1 5 7 3 2 7 9
= $\frac{NO}{c}$. Perciò
$\overline{3,1415929 - 0,1573279}$. 1,0052730
= 3, e per conseguenza

2,9442650 . 1,0052730 = 3, e finalmente 3,0000010 = 3, equazione fisicamente giusta.

Avendo stabilito al numero XVIII. $NI = \frac{26C}{Nc}$, ne segue essere $\frac{NI}{C} = \frac{26}{c} \cdot \frac{1}{N}$ $= 3,1415929 \cdot \frac{1}{N}$: ma poco fa ho scoperto $\frac{NI}{C} = 0,1533729$; dunque $\frac{1}{N} = \frac{01533729}{31415929}$ nella ipotesi di $k = 1$, $k+l = 6$, e di $n = 1$.

Suppongasi ora $n = 2$, e ci si presenterà l'equazione

$6,2831858 + A.R.1T.\frac{C}{6} - A.R.1T.\frac{C}{3} \cdot C$ $= 3$. In questo incontro dee C poco allontanarsi da $\frac{1}{2}$. Usando adunque il metodo dell'attentazione, troveremo $C = 0,4835354$, e conseguentemente $\frac{C}{3} = 0,1611918$; $\frac{C}{6} = 0,0805959$.

Il calcolo, che segue, dimostra l'esattezza dello stabilito valore di C.

L'arco di g.di 9 min.ti 10 ha la tang.te = 1613637.

L'arco di g.di 9 min.ti 9 ha la tang.te = 1610692.

Differenza delle predette tangenti = 2945.

La più piccola di esse tangenti la sottro dalla tangente $\frac{C}{3}$ = 1611918

1610692

e trovo la loro differenza = 1226.

Avremo pertanto Arco Tang. 1611918 = g.di 9 min.ti $9\frac{1226}{2945}$ = g.di 9 min.ti 9,4107.

In oltre

l'arco

Schadiasma X.

L'arco di g^{di} 4 min^{ti} 37 ha la tang. = 807509

L'arco di g^{di} 4. min^{ti} 36 ha la tang. = 804581

Differenza della predetta tangente = 2928.

Sottro la più piccola di essa tangente dalla

tangente $\frac{c}{6}$ = 805959
804581
e scopro la loro differenza = 1378.

Per la qual cosa Arco Tang. 805959 =

g^{di} 4. min^{ti} 36 $\frac{1378}{2928}$ = g^{di} 4 min^{ti} 36,47061.

Gli archi trovati sono, posto n=2,

$BI = g^{di}$ 9 min^{ti} 9,4107

$BN = g^{di}$ 4. min^{ti} 36,47061, e quindi

$NI = g^{di}$ 4. min^{ti} 32,9401 = min^{ti} 272,9401.

Si esprimerà quest'arco pel raggio = 1

col mezzo dell'analogia 10800,0000:

272,9401 :: 3,1415929 = $\frac{2b}{c}$:

0,0793951 = $\frac{NI}{c}$. Perciò

6,2831858 − 0,0793951 . 0,4835754

= 3, ovvero

6,2037907 . 0,4835754 = 3.

Ed in fatti effettuando la moltiplicazione

si scopre 3,0000006 = 3, equazio-

ne adeguatamente vera.

Giacchè pel numero XVIII. NI

$= \frac{2bc}{Nc}$, avremo $\frac{NI}{c} = \frac{2b}{c} \cdot \frac{1}{N}$ =

$3,1415929 \cdot \frac{1}{N}$: ma conforme ho testè

provato nella supposizione di n=2,

$\frac{NI}{c}$ = 0,0793951; dunque $\frac{1}{N}$ =

$\frac{793951}{31415929}$.

Posto n = 3, sarà c = 0,3201102,

$\frac{NI}{c}$

$\frac{NI}{C} = 0,0530001$, $\frac{1}{N} = \frac{530001}{31415929}$.

e quando $n = 4$ si scoprirà
$C = 0,2394906$, $\frac{NI}{C} = 0,03976773$,
$\frac{1}{N} = \frac{3976773}{31415929}$.

XX. Per determinare i nodi, o punti di quiete, secondochè la corda si ripiega in curva fornita di ventri 2, 3, 4, &c., accenneremo l'artifizio. Avendo per mano la formola (31.) $3 \cdot q^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}$ $= \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \rho - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$,
ed essendo per le formole 30, e 32
$C^2 = \frac{g}{G^2 k^{\frac{4}{3}}} = \frac{g c^2 \cdot \overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}^2}{4 \cdot b^2 \cdot \overline{n - \frac{1}{N}}^2}$, abbiamo

$C = \frac{3c \cdot \overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}}{2b \cdot \overline{n - \frac{1}{N}}}$ (33.), $\frac{C^2}{3 \cdot k^{\frac{1}{3}}} =$
$\frac{3c^2 \cdot \overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}^2}{4 \cdot b^2 k^{\frac{1}{3}} \cdot \overline{n - \frac{1}{N}}^2}$. In oltre $\frac{C^2}{3 \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}}} =$
$\frac{3c^2 \cdot \overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}^2}{4 \cdot b^2 \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}} \cdot \overline{n - \frac{1}{N}}^2}$. Rispettivamente al punto A' la nostra formola si modifica così $3 \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}} = \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3 \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$
$- \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3 \cdot k^{\frac{1}{3}}} = \frac{2nbC + BN - BI}{c}$
L'aggregato di questi archi nella ipotesi di $n = 2$ si agguaglia ad IOB'O'AN.

Trovato il raggio C col metodo del numero precedente, si faccia $3q^{\frac{1}{3}} - 3k^{\frac{1}{3}} = \rho$, o sia $27q = \overline{\rho + 3k^{\frac{1}{3}}}^3$. Questa equazione è alla prima parabola cubica

cubica, e si costruisce così. Sia (fig. 11.) B P, Z, G la nostra parabola cubica, in cui all'assissa BA = k corrispondeva la ordinata AP = $3k^{\frac{1}{3}}$. Tirata PD parallela all'asse BA', sarà BK = y, AK = PD = x, DZ = ρ = $3y^{\frac{1}{3}} - 3k^{\frac{1}{3}}$, e posta y = BA' = k+L, avremo DG = ρ = $3\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - 3k^{\frac{1}{3}}$.

Lo arco (fig. 10.) 9Z si faccia uguale alla ordinata (fig. 11.) DZ = $3y^{\frac{1}{3}} - 3k^{\frac{1}{3}}$, e chiaro si scopre, che a AK = y si riferirà (fig. 10.) Ae = ρ. Egli è dunque in mia potestà il descrivere la curva (fig. 11.) KeM; la cui coordinata BK = y, Ke = ρ. A y = k = BA corrisponde AK = ρ = $\frac{c^2}{3.k^{\frac{1}{3}}}$, e quando QM si agguaglia all'arco 9O della fig. 10., dimodochè BZO sia un quadrante, la tangente (fig. 11.) CN = ρ diviene infinita; e quindi si determina il relativo valore di y = BC, a cui si riferisce nella curva, alla quale si può adattare la nostra corda, la massima grandezza dell'ordinata y = c, come vedremo nella costruzione di essa curva. Si cangia poscia la tangente in infinita negativa CN', ed indi si annulla, qualora TV si agguaglia (fig. 10.) all'arco 9ZOB'. Dopo ciò la mentovata toccante torna positiva, e giunge all'infinito, quando QaM pareggia (fig. 10.) lo arco 9ZOB'O'. Il numero de' rami infiniti dalla parte della ordinata positiva, cioè KeN, LaeaN, &c. si agguaglia ad n. La figura 11. è adattata ad n = 2.

Altrettanti

Altrettanti sono i rami infiniti dalla parte delle ordinate negative. Si termina finalmente con una porzione di ramo positivo 2LH, che taglia la tangente A'H = $p = \frac{c^2}{3 \cdot \overline{k+l}^{\frac{1}{3}}}$ uguale alla tangente BH della fig. 10, la qual tangente corrisponde a $q = BA' = k+l$ (fig. 11.)

Ho di sopra notato al numero XVIII, che in riguardo ai nodi, o punti stabili esser dee $\frac{g}{3c^2k^{\frac{4}{3}}} = q^{\frac{1}{3}}p$, o sia $\frac{c^2}{3} = q^{\frac{1}{3}}p$. Fra gli assintoti bB, BA' si delinei l'iperbola bKZH corrispondente alla predetta equazione, la qual iperbola passerà pei punti K, H. Taglierà essa nei punti Z, &c. i rami positivi per esempio il Z2N situati fra il primo K2N, e l'ultimo 2LH, ed il numero dei punti di intersezione si uguaglierà a quello dei rami intermedi, cioè ad n−1. Nella fig. 11. abbiamo un solo ramo medio, ed una sola intersezione; perchè supponendosi n = 2, è n−1 = 1. Dai punti Z &c. passino le ordinate SZYS &c., ed S &c. saranno i nodi, o punti stabili, che rimarrebbero in quiete, quando la corda oscillerà scompartita nel numero dei ventri n.

XXI. Ridurremo a computo la linea BS &c. ricorrendo nuovamente alla tavola degli archi riferiti alle tangenti. Giacchè rispettivamente ai nodi esser dee $\frac{c^2}{3} = q^{\frac{1}{3}}p$, avremo $p = \frac{c^2}{3q^{\frac{1}{3}}}$.

Sostituito questo valore in cambio di p nella formola (31) trovo $3 \cdot g^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}} =$
$\overline{\text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3 \cdot g^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3 \cdot k^{\frac{1}{3}}}}$
$= \overline{\text{Arco Rag. } 1 \text{ Tang. } \frac{C}{3 g^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. } 1 \text{ Tang. } \frac{C}{3 \cdot k^{\frac{1}{3}}}} \cdot C.$

Sia, come al numero XIX. $k+L = 4$, $k = 1$, ed attenendomi alla fig. 12. composta di due ventri, che suppone $n = 2$, vado in traccia della distanza $BS = g$ dal punto B dello unico nodo S. Nella detta ipotesi ho già stabilito $C = 0,4835754$. Col mezzo di varj tentativi egli è di uopo assegnare a g il competente valore, onde si avveri la sovrapposta equazione, il che ottenuto, sarà il detto valore $= BS$, e si uguaglierà alla lontananza dal nodo S dal punto B.

Ho dunque dopo molte prove trovato $g^{\frac{1}{3}} = 1,4979172$, e conseguentemente $g =$
$3,3609606122159772964 4 4$: ecco come ciò si dimostra. E primieramente $3 g^{\frac{1}{3}} - 3 k^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 1,4979172 - 3$
$= 1,4937516$.

Cerchiamo adesso il valore di
$\overline{\text{Arco Rag. } 1 \text{ Tang. } \frac{C}{3 g^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. } 1 \text{ Tang. } \frac{C}{3 k^{\frac{1}{3}}}} \cdot C$

La tangente $\frac{C}{3 g^{\frac{1}{3}}} = \frac{0,4835754}{4,4937516} =$
$0,1076106$. Mi insegnano le tavole, che l'arco di 6^{gr} 6 min. 9 ha la tang. 107519
l'arco di 6^{gr} 6 min. 8 ha la tang. $\underline{1074576}$
Differenza delle predette tangenti $= 2943$

Sottro

Schediasma X.

Sottro la minore di esse tangenti dalla tangente $\frac{c}{3q^{\frac{1}{3}}}$, e trovo

$$
\begin{array}{r}
1076106 \\
\underline{1074576} \\
1530
\end{array}
$$

Si inferisca, che la tangente 1076106 compete all'arco di g.^{di} 6 min.^{ti} 4 $\frac{1530}{2943}$ = min.^{ti} 364, 5199. Sia BN (fig. 10.) uguale ad un tal arco, supposto il raggio BL = 1. Si aggiunga ad esso il semicircolo NON' = g.^{di} 180 = min.^{ti} 10800, e ne risulterà l'arco BNOB'N' = min.^{ti} 11164, 5199, che serve alla determinazione del nodo S (fig. 11.). E voglia il vero, il punto C, a cui corrisponda il massimo valore della ordinata $y = c$ nella curva, alla quale si può accomodare la nostra corda, richiede la tangente (fig. 10.) BE = ∞, che compete al quadrante BO, ed incontrandosi prima (fig. 11.) il punto C del punto S, ne segue, che l'arco relativo a questo punto ha da superare il quadrante, e per conseguenza da uguagliarsi (fig. 10.) a BNOB'N'.

Osservo essere la tangente $\frac{c}{3k^{\frac{1}{3}}}$ $= \frac{c}{3} = \frac{0,4835754}{3} = 0,1611914$, e che ad essa pel numero XIX. conviene l'arco di g.^{di} 9 min.^{ti} 9,4107 = min.^{ti} 549,4107.

Gli archi trovati sono

BNOB'N'

$BNOB'N' =$ minuti $111.6'46{,}5199$

$BI =$ minuti $5'49{,}64602$, e perciò

$IOB'N' =$ minuti $10619{,}1092$

Poichè un semicircolo = gradi 180 = minuti $10800 = \frac{355}{113} = 3{,}1415929$ in riguardo al raggio 1, esprimeremo l'arco $\frac{IOB'N'}{C}$ in parti del raggio predetto mediante l'analogia $10800{,}0000 : 10619{,}1092 :: 3{,}1415929 :$

$3{,}0889739 = A.R.1\,T.\frac{C}{3q^{\frac{1}{3}}} - A.R.1\,T.\frac{C}{3k^{\frac{1}{3}}}$

$= \frac{IOB'N'}{C}$, e moltiplicando per $C =$ $0{,}483574$, ci si presenterà

$3{,}0889739 \cdot 0{,}4835754 =$

$1{,}4937516 = A.R.C\,T.\frac{C^2}{3q^{\frac{1}{3}}} - A.R.C\,T.\frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$

$= IOB'N'$.

Ora di sopra abbiamo scoperto $\overline{3 \cdot q^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}} = 1{,}4937516$; dunque con fisica adequazione si adempie l'equazione $\overline{3 \cdot q^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}} = A.R.C\,T.\frac{C^2}{3q^{\frac{1}{3}}} - A.R.C\,T.\frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$, posta (fig. 11.) $AS = q = 3{,}3609606$, e per conseguenza S è il nodo cercato, quando $n = 2$.

XXII. Agevolmente si costruisce la curva, a cui oscillando si adatta la corda del presente esempio III. Avendo già delineata la curva, che ha per coordinate (fig. 11.) $AK = q$, $KG = p$, col mezzo della formola (29.) $-\frac{1}{2} = \frac{-3q^{\frac{1}{3}}}{3C^2k^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}}p$ si

vendà

renda manifesto il relativo valore di z; e perciò mi è concesso il descrivere la curva (fig. 12.) $Q\,G\,C\,G'Q'$, $rQ\,rG\,rC\,rG'rQ'$ &c., nella quale alla ascissa $BK = q$ corrispondano le ordinate $KG = z$. Quando $q = BA = k$, abbiamo pel numero XVIII. $p = \frac{g}{3G^2k^{\frac{5}{3}}}$. Sostituiti questi valori nella formola $rg.$, si trova $-\frac{1}{z} = \frac{-g}{3G^2k} + \frac{g}{3G^2k} = 0$, e per conseguenza $z = -\infty = AQ$. Taglio BC, BrC uguali alla linea similmente denominata della fig. 11., e giacchè in tali circostanze $p = \mp\infty$, sarà per la formola ($rg.$) $-\frac{1}{z} = \mp\infty$, e perciò $z = \mp 0$. Che se si determini BS &c. $= BS$ &c. della fig. 11; in riguardo alla qual ascissa $p = \frac{g}{3G^2k^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}}$, avremo $-\frac{1}{z} = \frac{-gq^{\frac{1}{3}}}{3G^2k^{\frac{4}{3}}} + \frac{gq^{\frac{1}{3}}}{3G^2k^{\frac{4}{3}}} = 0$, cioè

$$z = \pm\infty = \begin{cases} SQ' \\ SrQ \end{cases}.$$

Avverto, che ponendo $BK = q$ di lunghezza media fra BA, e BC, onde si abbia $q > k$, e (fig. 11.) $Ke = p > AR = \frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}} = \frac{g}{3G^2k^{\frac{5}{3}}}$, e quindi $q^{\frac{2}{3}}p > \frac{k^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}g}{3G^2k^{\frac{5}{3}}} = \frac{gq^{\frac{1}{3}}}{3G^2k^{\frac{4}{3}}}$. Per la formola ($rg.$) $-\frac{1}{z} = \frac{-gq^{\frac{1}{3}}}{3G^2k^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}}p$ adunque scopriremo $-\frac{1}{z}$ uguale ad una quantità

positiva

positiva, e conseguentemente è uguale ad una quantità negativa. Ciò significa doversi prendere le z negative in riguardo alle p, cioè in diversa per direzione contraria, come in fatti le ho determinate nella figura 12.

Concciossiachè pel numero III. $v = \int -z\,dx = \int -z\,dq = \log. y$ nella logistica della suttangente c, e preso c come protonumero; quel numero, che nel ramo della ordinate decrescenti della predetta logistica corrisponde al $\log. = \int -z\,dq = CGK$, si agguaglia alle ordinata $Ka = y$ della curva per esempio $AeTS'e7A'$, alla quale si accomoda la nostra corda, quando $n = 2$. Nei punti A, S', A' l'ordinata è nulla; perchè quivi l'aja CQA; CQS, $eCaQA'$ è infinita, ed al logaritmo infinito corrisponde il numero $y = 0$ nel mentovato ramo della ordinate calanti. Al contrario nei punti C, eC $y = c$ massimo suo valore, a cagione che $\int -z\,dq = 0$, ed il log. $= 0$ conviene al protonumero $= c = CT = eCeT$.

Trovare il tempo, nel quale oscilla la corda, la cui grossezza $\frac{G^2 k^{\frac{4}{3}}}{\overline{k+x}^{\frac{4}{3}}}$.

XXIII. La due formole (26.) $g = \frac{3aPG^2K}{M} \cdot \frac{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$, (32.) $g = \frac{9c^2}{4 \cdot 6a} \cdot \frac{G^2 k^{\frac{4}{3}} \cdot \overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}^2}{\overline{n - \frac{1}{N}}^2}$ somministrano il

il valore di

$$a = \frac{3c^2}{4b^2}\cdot\frac{M\cdot\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}\cdot k^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}\right)}{P\cdot\overline{n-\frac{1}{N}}^{2}} \quad (33.)$$

E giacchè pel numero XXII. della Schediasma IX. il tempo di una vibrazione della corda $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, ne risulta

$$t = \frac{c}{2b\cdot\overline{n-\frac{1}{N}}}\sqrt{\frac{3M\cdot\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}\cdot k^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}\right)}{hP}} \quad (34.)$$

Supposto $n=\infty$, scopriremo

$$t = \frac{c}{2bn}\sqrt{\frac{3M\cdot\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}\cdot k^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}\right)}{hP}}.$$

Se fosse $k=\infty$, e perciò $\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{3}} + \frac{L}{3k^{\frac{2}{3}}}$, ed $\frac{1}{N}=0$, poichè in tal circostanza svanisce l'arco N9 (fig. 10.), si troverebbe $t = \frac{c}{2bn}\sqrt{\frac{ML}{hP}}$; conforme richiedono le corde ugualmente grossa. Ed in fatti la grossezza della corda $\frac{G^2k^{\frac{4}{3}}}{\overline{k+x}^{\frac{4}{3}}}$ sarebbe adequatamente costante, ed $=G^2$.

I tempi delle vibrazioni della stessa corda stanno come $\frac{1}{n-\frac{1}{N}}$, e conseguentemente i reciproci o i numeri delle vibrazioni fatte in tempo uguale come $n-\frac{1}{N}$. Nell'esempio del numero XIX., in cui si stabilisce $k+L=4$, $k=1$, si avrebbe

$n=1$, $\frac{1}{N} = \frac{1573279}{31415929}$

$n=2$, $\frac{1}{N} = \frac{793951}{31415929}$

$n=3$, $\frac{1}{N} = \frac{530001}{31415929}$

$n=4$.

$n = 4$; $\frac{1}{N} = \frac{397373}{3141592 9}$

I suoni pertanto serberebbero adequatamente la proporzione dei seguenti numeri

Valori di n	Proporzioni fra i suoni
1.	2948 4 2656
2.	6 2 0 3 7 9 0 7
3.	9 3 7 1 7 7 8 7
4.	1 2 5 2 6 6 0 4 3

&c.

I primi due suoni si corrispondono in Ottava crescente sopra 1 : 2 per la ragione $\frac{62037907}{59665300}$ media fra le due $\frac{27}{261}$, $\frac{26}{25}$; cioè a dire per un minor semituono stesso.

I suoni secondo e terzo formano una Quinta, che cresce sopra 2 : 3 per la ragione $\frac{93717787}{93056860}$ molto prossima a $\frac{142}{141}$, che non giunge a $\frac{7}{12}$ di comma.

Dai suoni terzo e quarto è composta una Quarta 3 : 4, che sovrabbonda per la proporzione, che sta di mezzo fra $\frac{406}{405}$, e $\frac{405}{404}$ quinta parte in circa del comma. ^ $\frac{12526 6043}{12495 7049}$

Le ragioni fra i suoni quarto e quinto, quinto e sesto, &c. si avvicinerebbero

avvicinerebbero talmente alla armonia 4:5; 5:6 &c., che l'orecchio non ne discernerebbe le differenze, che diverrebbero sempre più piccole.

Consideriamo adesso la relazione fra i suoni acuti ed il grave. Ho già detto, che i due primi suoni si riferiscono in Ottava crescente per una ragione media fra le due $\frac{27}{26}$, $\frac{26}{25}$

La ragione fra il primo ed il terzo suono cresce sopra 1:3 per la ragione $\frac{93712787}{89527950}$ media fra $\frac{23}{22}$, $\frac{22}{21}$.

Più grande è ancora la differenza $\frac{125260943}{119370600}$ media fra $\frac{22}{21}$, $\frac{21}{20}$, per cui il suono quarto paragonato col primo cresce sopra la doppia Ottava 1:4.

Il suono grave posto al confronto coll'acutissimo formerebbe un'armonia, che supererebbe il rapporto 1:2 per la ragione $\frac{31415929}{29842650}$ assai prossima a $\frac{20}{19}$: Si congetturi dalle cose dette, quanto riuscirebbe ingrata all'orecchio una tal mistura di suoni.

Posto che la corda si accomodasse ad una delle curve da me determinate, renderebbe il suono ad essa figura confacente, e passerebbe da uno stato

all'

alli altro di quiete nel tempo di una vibrazione. Ma ripiegandosi in una curva composta da molte della predetta curva, il che succede qualora colle maniere considerate si vincola al tragitto, produrrebbe un aggregato di suoni appropriato alle curve componenti, e riferendosi questi in ragioni assimetre, non ritornerebbe più, parlando in rigor geometrico, e prescindendo dalla resistenza, allo stato assoluto di quiete. Si applichi alla nostra corda quello, che ho scritto della corda dell'esempio II. al numero XV.

XXIV. La grossezza della corda accetti l'espressione $\frac{G^2 k^{\frac{4}{3}}}{\overline{k-x}^{\frac{4}{3}}}$, e si vibrerà essa corda nel tempo $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}} =$

$$\frac{c}{16\cdot\overline{n-\frac{1}{N}}}\sqrt{\frac{3M\cdot\overline{k-L}^{\frac{1}{3}}\cdot k^{\frac{1}{3}}\cdot-\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}+k^{\frac{1}{3}}}{hp}} \quad (35.)$$

Se tale indice, ch'è prodotto sotto il segno radicale riesce negativo, per cagione [illegible] immaginario il tempo di una vibrazione, che si suppone effettuarsi colle leggi di un pendolo a cicloide. Ciò significa essere impossibile [illegible] che la corda induca tale figura, che [illegible] le forze acceleratrici [illegible] la curva [illegible] delle ordinate [illegible] una [illegible] di [illegible] della corda [illegible] figura [illegible]

supposto

Schediasma X.

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible] [illegible] [illegible] dalle [illegible]:
[illegible] non giungerebbe [illegible] [illegible] =
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible] [illegible] [illegible] dopo [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible]. Di tali
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible],
che non possono ugualmente [illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible],
[illegible] [illegible] [illegible] del tempo,
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible],
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible],
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible].

[illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible],
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

Schediasma X.

~~che nei [illegible] non c'è alcuna [illegible] regolarmente [illegible] di oscillare [illegible], posta [illegible] [illegible] [illegible] la quale [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]~~.

~~Supposto che sia $k < L$, diviene [illegible] del tempo [illegible]~~ ascen:~~dendo all'infinito la grossezza~~ $\frac{G^2 k^{\frac{4}{3}}}{\overline{k-x}^{\frac{4}{3}}}$ della corda, quando $x = k$, impedirebbe la necessaria flessibilità, e conseguentemente la corda, che fisicamente non può esistere, riuscirebbe inetta alle vibrazioni.

XXV. Sin qui ho trattato di quelle corde, che nello oscillare si adattano a curve espresse da formole differenziali, che ammettendo la separazione delle variabili, permettono che si riduca a computo il tempo delle vibrazioni della corda medesima. ~~[illegible]~~ Si danno pertanto due specie di corde, che quantunque si spieghino in curve dinotate da equazioni differenziali, nelle quali non si sa sviluppare la incognita, nulladimeno si possono determinare col computo i tempi della loro oscillazione. La condizione, che si richiede consiste in ciò, che le parti della corda prese da un punto estremo siano sempre simili alla corda totale. Questa circostanza si avvera in due

casi

casi, cioè quando le corde sono di figura triangolare, o conica; imperciocchè le loro parti prese dal vertice del triangolo, o del cono serbano costantemente simiglianza col tutto. Trovato poscia il tempo, in cui si vibrano le nostre corde divise in un numero infinito di parti, e dimostrando poscia, che i tempi delle vibrazioni delle corde simili stanno come una data potestà dei lati omologhi, si passa facilmente alla determinazione del tempo di una vibrazione, quando il numero dei ventri è finito.

Trovare il tempo, in cui si vibra una corda di figura triangolare.

XXVI. Delle corde di figura triangolare ne ho implicitamente tenuto discorso, allorchè sono andato in traccia della legge, che regola le vibrazioni del tamburo; i cui minimi settori sono corde triangolari.

Rappresenti CeaeC (fig. 1.) una delle nostre corde. Sia $CA = L$, $eae = G$, $CK = g$, $KH = dg$, e si chiami M la massa della corda, P il peso, o forza che la tende. Scopriremo il suo volume $V = \frac{GL}{2}$. Dalla similitudine dei triangoli CeaeC, CLdL ne deduco l'analogia

$$CA : CK :: eae : LdL$$

$$L : g :: G : \frac{Gg}{L},$$

che

che determina $Lnl = \frac{Gq}{L}$. Perciò l'aja, o volume $LnG = \frac{Gq\,dq}{L}$. La massa dell'elemento LnG si stabilisca colla analogia $\frac{GL}{2} : M :: \frac{Gq\,dq}{L} : \frac{2Mq\,dq}{L^2}$, l'ultimo termine della quale si agguaglia alla massa cercata.

Sia $KH = dq$ una delle infinite parti, nelle quali si suppone divisa la corda $CAnaC$, e potendosi considerare $GnG = Lnl$, cioè a dire costante la grossezza della cordicella, la cui lunghezza KH, avremo per la legge delle vibrazioni della corda ugualmente grossa

$$t = \frac{c}{2b}\sqrt{\frac{2Mq\,dq^2}{L^2 hP}}\ (36),$$

dinotando al solito t il tempo di una oscillazione espresso in secondi, $\frac{c}{2b}$ la proporzione fra il raggio, e la semicirconferenza circolare, ed h la lunghezza del pendolo a secondi.

Concciossiachè tutti gli elementi KH, nei quali è scompartita la corda, abbiano ad essere unisoni, la quantità $q^{\frac{1}{2}}dq$ deve assumersi costante. Essendo dunque la $\int q^{\frac{1}{2}}dq = \frac{2}{3}q^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}$, quando $CK = q = CA = L$, dovrà essere (chiamato n il numero delle parti, nelle quali la corda è divisa) $\frac{\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}}{n} = q^{\frac{1}{2}}dq$, o sia $\frac{4L^3}{9n^2} = q\,dq^2$. Fatta la sostituzione nella

formola

formola (36.), ne risulta $t = \frac{c}{3nb}\sqrt{\frac{2ML}{hP}}$ (37.), tempo di una vibrazione della nostra corda divisa nel numero infinito n di parti.

XXVII. Col metodo usato al numero XXIV. dello Schadiasma IX. troveremo la distanza dal punto C dei nodi o linee stabili, per esempio Ll, che separano una parte dall'altra, quando $n = \infty$. Giacche $\int q^{\frac{1}{2}} dq = \frac{2}{3} L^{\frac{3}{2}}$, posta $q = L$, questa sommatoria divisa per ∞ è relativa alla distanza q del primo nodo dal punto C. Avremo pertanto $\frac{\frac{2}{3} L^{\frac{3}{2}}}{\infty} = \frac{2}{3} q^{\frac{3}{2}}$, e quindi

$$q = \frac{L}{\infty^{\frac{2}{3}}}.$$

L'equazione $\frac{2 \cdot \frac{2}{3} L^{\frac{3}{2}}}{\infty} = \frac{2}{3} q^{\frac{3}{2}}$ mi dà la distanza del secondo nodo

$$q = \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot L}{\infty^{\frac{2}{3}}}.$$

Ne nascerà dunque la serie delle cercate distanze dal punto C

$$\frac{L}{\infty^{\frac{2}{3}}};\ \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot L}{\infty^{\frac{2}{3}}};\ \frac{3^{\frac{2}{3}} \cdot L}{\infty^{\frac{2}{3}}}\ \&c.\ \frac{\infty^{\frac{2}{3}} \cdot L}{\infty^{\frac{2}{3}}} = L.$$

XXVIII. Ho dimostrato al numero XIX. dello Schadiasma IX., che due palli di tamburo della medesima materia, ugualmente grosse, e tese dalla stessa somma di forza si vibrano intere, o divise in pari numero di parti in tempi, che si riferiscono come le radici quadrate dei cubi dei loro diametri. Con un raziocinio affatto uniforme si prova, che i tempi

delle

dalle oscillazioni di due corde simili CLλl, Cαzα, del pari grosse, della stessa materia, e tese dal medesimo peso P si corrispondono come le radici seconde dei cubi delle loro lunghezze CK, CA, cioè a dire come $\overline{CK}^{\frac{3}{2}} : \overline{CA}^{\frac{3}{2}}$.

Ciò posto, sia CLλL la prima delle parti infinitesime, ed unisone, nelle quali si suppone divisa la corda Cαzα; e perchè sta immobile la linea Lλl, io posso considerare CLλL come una corda. Essendo dunque, conforme ho testè dimostrato, $CK = \frac{L}{cs^{\frac{2}{3}}}$, se ne raccoglie $\overline{CK}^{\frac{3}{2}} = \frac{L^{\frac{3}{2}}}{cs}$; e giacchè il tempo di una vibrazione della corda CLλL $= \frac{c}{3csb}\sqrt{\frac{2ML}{hP}}$, si averebbe la analogia

$$\overline{CK}^{\frac{3}{2}} = \frac{L^{\frac{3}{2}}}{cs} : \overline{CA}^{\frac{3}{2}} = L^{\frac{3}{2}} :: \frac{c}{3csb}\sqrt{\frac{2ML}{hP}} : \frac{c}{3b}\sqrt{\frac{2ML}{hP}}$$

= il tempo di una vibrazione della corda intera Cαzα.

Che se CLλL, LλG siano due minime parti unisone, onde si abbia $CH = \frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot L}{cs^{\frac{2}{3}}}$, e per conseguenza $\overline{CH}^{\frac{3}{2}} = \frac{2\cdot L^{\frac{3}{2}}}{cs}$, pongo al paragone la corda CGλG, che oscilla divisa in due porzioni unisone, colla corda Cαzα, che parimente oscilla in due porzioni unisone distribuita; e mi si presenta la analogia

$\overline{CH}^{\frac{3}{2}}$

$$\overline{CH}^{\frac{3}{2}} = \frac{2L^{\frac{3}{2}}}{cs} : \overline{CA}^{\frac{3}{2}} = L^{\frac{3}{2}} :: \frac{c}{3\cdot 36}\sqrt{\frac{2ML}{hP}} :$$

$\frac{c}{2\cdot 36}\sqrt{\frac{2ML}{hP}} = t$, tempo di una vibrazione della corda Ca2a, che oscilla scompartita in due membri unisoni.

Mettendo al confronto lo aggregato delle tre prime minime parti unisone colla corda Ca2a, che si agita divisa in tre porzioni, scoprirò il tempo impiegato in una oscillazione da quest'ultima corda, cioè $t = \frac{c}{3\cdot 36}\sqrt{\frac{2ML}{hP}}$.

E generalmente, qualunque sia il numero n delle parti unisone, si troverà sempre $t = \frac{c}{n\cdot 36}\sqrt{\frac{2ML}{hP}}$; laonde la stessa formola si adatta a qualsivoglia valore di n o finito, o infinito.

Mi ristringo a cavare la unica conseguenza, che i tempi di una vibrazione della stessa corda, secondochè si vibra o intera, o divisa in 2, 3, 4 &c. parti unisone, saranno proporzionali alla serie armonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c.; e quindi i suoni, o i numeri delle oscillazioni fatte in tempo uguale accetteranno la ragione dei numeri naturali 1, 2, 3, 4 &c., conforme interviene altresì nella corda cilindrica.

XXIX. Avverto, che senza punto alterare il valore del tempo t, le sezioni per esempio LaL della corda possono cangiarsi di rettangolari in circolari, purchè passi uguaglianza

fra

fra le sezioni dell'una, e dell'altra figura corrispondenti ad assisse uguali. In tale ipotesi nascerebbe la figura della corda dal girare (Fig. 12.) la parabola conica CL intorno all'asse CA; imperciocchè stando sempre per la natura di essa curva CK come $\overline{KL}^2$; la sezione circolare, il cui raggio KL, o sia la grossezza della corda accetterebbe costantemente la proporzione della assissa CK = q. La condizione essenziale della nostra corda consiste in ciò, che le sezioni, o sia le grossezze variabili si corrispondano nella ragione della assissa; nulla importando, poi, che le dette sezioni siano piuttosto rettangolari che circolari. Lo stesso accade anche nella corda di grossezza costante, la figura della quale non ha punto luogo nei tempi delle loro vibrazioni.

XXX. I nodi della corda CEAE (Fig. 1.), che viene divisa nel numero di parti n, si determinano agevolmente. Cominciando dal punto C; si prenda la serie di parti infinitesime

$$\frac{L}{\omega^{\frac{2}{3}}},\ \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{\omega^{\frac{2}{3}}},\ \frac{3^{\frac{2}{3}}L}{\omega^{\frac{2}{3}}}\ \text{\&c.}\ \frac{n^{\frac{2}{3}}L}{\omega^{\frac{2}{3}}},$$

nelle quali si supponga distribuita la nostra corda, ed essa serie si continui sino al numero n di termini.

Determineremo il primo nodo facendo $\frac{n^{\frac{2}{3}}L}{\omega^{\frac{2}{3}}} : \frac{L}{\omega^{\frac{2}{3}}} :: L : \frac{L}{n^{\frac{2}{3}}}$, onde

na

ne risulti il quarto termine dell'analogia $\frac{L}{n^{\frac{2}{3}}}$ uguale alla distanza dal primo nodo dal punto C.

Coll'analogia $\frac{n^{\frac{2}{3}}L}{\omega^{\frac{2}{3}}} : \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{\omega^{\frac{2}{3}}} ::$ $L : \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}}$ si renderà nota la distanza $= \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}}$ del secondo nodo dal punto C.

Proseguendo con tal ordine ci si presenterà la progressione $\frac{L}{n^{\frac{2}{3}}}, \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}}, \frac{3^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}}$ &c. $\frac{n^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}} = L$, la quale in ciò solo discorda da quella delle parti infinitesime, che il divisore $\omega^{\frac{2}{3}}$ si cangia in $n^{\frac{2}{3}}$; e perciò quando n si accresca all'infinito, la seconda serie coincide colla prima.

Siccome la prima serie si è dedotta dal dividere per ω la quantità $\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}} = \int q^{\frac{1}{2}}dq$, posto $q = L$; così la seconda serie può nascere, dividendo per n la stessa grandezza $\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}$, e facendo gradatamente 1, 2, 3, 4 &c. di queste parti $= \frac{2}{3}q^{\frac{3}{2}}$. I valori di q, che si scopriranno, saranno uguali ai termini della progressione seconda.

XXXI. Giacchè $q^{\frac{1}{2}}dq$ è proporzionale al tempicello costante, in cui si vibrano le cordicelle unisone, la lunghezza delle quali $= dq$; ne segue, che dividendo per n la quantità $\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}} = \int q^{\frac{1}{2}}dq$, io vengo a distribuire la corda in porzioni composte di un pari numero $\frac{\omega}{n}$

di

Schediasma X.

di elementi unisoni, le quali porzioni sono altresì unisone. Quindi le corde triangolari hanno la proprietà comune colla corda cilindrica, che i segmenti unisoni sono formati da un egual numero di elementi unisoni, e generalmente i tempi delle vibrazioni di due segmenti serbano la proporzione dei numeri degli elementi unisoni, che nei mentovati segmenti sono contenuti.

Tagliata ad arbitrio $CK = y$, il numero degli elementi unisoni contenuti nella parte CLnL e quello degli elementi contenuti nella corda intera Cene sta come $y^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$, e per conseguenza il numero dei detti elementi compresi nella parte Lne si riferisca a quello contenuto nella corda totale come $L^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$. Nella stessa proporzione si corrisponderanno i tempi delle vibrazioni del segmento Lne, e della corda Cene, quando l'uno, e l'altro oscillano interi. Sarà Lne l'ultima delle porzioni, nella quale si può scompartire una corda, quando si vibra, se l'ascissa $CK = y$ si ponga eguale ad $\frac{\overline{n-1}^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}} . L$. Avremo pertanto $y^{\frac{3}{2}} =$

$\frac{\overline{n-1}}{n} . L^{\frac{3}{2}} = L^{\frac{3}{2}} - \frac{L^{\frac{3}{2}}}{n}$; e perciò i tempi delle vibrazioni della porzione Lne, e della corda Cene, che resta indivisa, i quali accettano generalmente la

ragione

ragione di $L^{\frac{3}{2}} - g^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$, li troveremo come $\frac{L^{\frac{3}{2}}}{n} : L^{\frac{3}{2}}$, o sia come $\frac{1}{n} : 1$, conforme in fatti dee stare. Se la corda CAa oscillasse distribuita nel numero n di parti, ne risulterebbero i tempi uguali.

Il segmento Lna può anch'esso vibrarsi scompartito in 2, 3, 4 ecc. membri unisoni; e quindi la totale serie di suoni, che può rendere, è proporzionale ai numeri 1, 2, 3, 4 ecc.

Trovare il tempo, nel quale si vibra una corda di figura conica.

XXXII. Passo a far parola della corda di figura conica, la quale traggono l'origine dal girare il triangolo CAa (fig. 1.) intorno all'asse CA. Pongo $CA = L$, la base circolare, il cui raggio $Aa = G^2$, $CK = g$, $KH = dg$, la massa della corda $= M$, il peso o forza, che la tende, $= P$. Per la natura del cono abbiamo il volume $V = \frac{G^2L}{3}$, ed inoltre l'analogia $L^2 : g^2 :: G^2 : \frac{G^2 g^2}{L^2}$, che mi dà la sezione circolare, il cui raggio KL, $= \frac{G^2 g^2}{L^2}$. Il perchè il volume del menomo frusto conico $LnG = \frac{G^2 g^2 dg}{L^2}$. La massa di un tale elemento si determina mediante l'analogia $\frac{G^2L}{3} : M :: \frac{G^2 g^2 dg}{L^2} : \frac{3Mg^2dg}{L^3}$,

la

la ultima termine della quale si agguaglia alla massa, di cui si va in traccia.

Sia $KH = dq$ una delle infinite parti, nelle quali la corda $CAZA$ si suppone divisa, e passando adequazione fra i raggi KL, HG, si può considerare costante la grossezza della funicella LhG, la cui lunghezza $KH = dq$. Per la legge delle corde ugualmente grosse si vibrerà essa funicella nel tempo espresso in secondi $t = \frac{c}{\pi}\sqrt{\frac{3Mq^2dq^2}{L^3hp}}$ (36.), significando giusta il consueto $\frac{c}{\pi}$ il raggio diviso per la semicirconferenza circolare, ed h la lunghezza del pendolo a secondi.

Dovendo esser unisoni tutti gli elementi KH, ne' quali è scompartita la corda, la grandezza $q\,dq$ ha da assumersi in qualità di costante. Ora essendo pertanto la $\int q\,dq = \frac{q^2}{2} = \frac{L^2}{2}$, qualora $CK = q = CA = L$, e chiamando ∞ il numero infinito delle parti unisone componenti la corda, si dovrà avere $\frac{\frac{1}{2}L^2}{\infty} = q\,dq$. Effettuata la sostituzione nella formola (36.), ci si presenterà $t = \frac{c}{\infty \cdot \pi}\sqrt{\frac{3ML}{4hp}}$ (39.) tempo di una vibrazione della corda $CAZA$, che oscillando si adatta ad una curva fornita del numero ∞ infinito di ventri.

XXXIII. Il metodo contenuto nel numero XXIV. dello Schediasma IX. ci insegna a trovar le distanze dal punto C dei nodi, o circoli stabili, il diametro di uno

dei

dei quali sia per esempio LrL, quando la corda oscilla divisa in un numero infinito di parti unisone.

Conciossiachè $\int q\,dq = \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}L^2$, posta $q = L$, dividasi per ∞ la grandezza $\frac{1}{2}L^2$, e formata l'equazione $\frac{\frac{1}{2}L^2}{\infty} = \frac{1}{2}q^2$, servirà questa per trovare la lontananza del primo nodo dal punto C, uguale a $q = \frac{L}{\sqrt{\infty}}$.

La formola $\frac{2\cdot\frac{1}{2}L^2}{\infty} = \frac{1}{2}q^2$ somministrerà la distanza del secondo nodo $q = \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{\infty}}$.

Continuando in tal guisa ci si presenterà la progressione delle distanze dei nodi dal punto C

$$\frac{L}{\sqrt{\infty}},\ \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{\infty}},\ \frac{L\sqrt{3}}{\sqrt{\infty}}\ \text{\&c.}\ \frac{L\sqrt{\infty}}{\sqrt{\infty}} = L.$$

XXXIV. Ora egli è di uopo l'andare in traccia del tempo di una oscillazione della corda intera, o pure divisa in un numero qualunque di parti unisone. I tempi delle oscillazioni di due corde coniche simili, della stessa materia, e tese dalla stessa forza P, che si vibrano intere, o scompartite in pari numero di membri, debbono stare fra loro come una potestà delle lunghezze delle corde predette. Dal numero II. raccogliesi, che le curve, in cui si ripiegano le corde, sono espresse dalla equazione $\varphi q \cdot dq^2 = -g\frac{ddy}{y}$, e giacchè nel nostro caso $\varphi q = \frac{G^2q^2}{L^2}$, avremo $\frac{G^2q^2dq^2}{L^2} = -g\frac{ddy}{y}$. Ora se in due corde

corde simili le assisse g; ed i loro elementi dg proporzionali alle lunghezze L, debbono ad esse corrispondere ordinate uguali, perchè sia in entrambe le corde costante la massima saetta: la ragione si deduce da ciò, che la figura, a cui si adatta una corda sonora oscillando, non può variarsi, trattandosi di corde simili, salvochè nella lunghezza, e nelle ordinate proporzionali in siti analoghi alla massima saetta; sopra di che veggasi il numero XIX. dello Schediasma IX. Avremo dunque nella mentovata ipotesi y, dy, ddy eguali in amendue le corde, e per conseguenza costante il valore $=\frac{ddy}{y}$. Per la qual cosa essendo G^2 come L^2, g^2dg^2 come L^4, ne risulta g come L^4. Ora pel citato numero II. $g=\frac{aVP}{M}$, e pel numero XXXII. $V=\frac{G^2L}{3}$; dunque $g=\frac{aG^2LP}{3M}$, e quindi $a=\frac{3gM}{G^2LP}$: ma g come L^4, M come L^3, G^2 come L^2, e P si suppone costante; dunque a come L^4. E poichè pel numero XXII. dello Schediasma IX. $t=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, si conchiude essere t proporzionale ad L^2. Il perchè i tempi delle oscillazioni di due corde coniche simili $CLaL$, ce &c. della stessa materia, e tese dal medesimo peso P si riferiscono in ragione dei

quadrati

quadrati della lunghezza, cioè a dire come $\overline{CK}^2 : \overline{CA}^2$.

Ciò dimostrato, sia CLdL la prima delle parti minime, ed unisone, in cui supponesi divisa la corda CAaC. Stando immobile la sezione LdL, mi è concesso di considerare CLdL come una corda appoggiata ad uno scannello nel punto L; e giacchè, conforme ho testè provato, $CK = \frac{L}{\sqrt{cs}}$, ossia $\overline{CK}^2 = \frac{L^2}{cs}$, ed il tempo d'una vibrazione della corda $CLdL = \frac{c}{cs.nb}\sqrt{\frac{3ML}{4hp}}$, si verifica l'analogia $\overline{CK}^2 = \frac{L^2}{cs} : \overline{CA}^2 = L^2 ::$ $\frac{c}{cs.nb}\sqrt{\frac{3ML}{4hp}} : \frac{c}{nb}\sqrt{\frac{3ML}{4hp}} = t$, il quarto termine della quale si eguaglia al tempo di una vibrazione della corda CAaC.

Se poi CLdL, LdG siano due infinitesime porzioni unisone, dimodochè si abbia $CH = \frac{L\sqrt{n}}{\sqrt{cs}}$, e conseguentemente $\overline{CH}^2 = \frac{nL^2}{cs}$; metto al confronto la corda CGgG, che viene partita in due porzioni unisone, colla corda CAaC, che oscilla altresì in due membri unisoni scompartita, e ne deduco l'analogia $\overline{CH}^2 = \frac{nL^2}{cs} : \overline{CA}^2 = L^2 ::$ $\frac{c}{cs.nb}\sqrt{\frac{3ML}{4hp}} : \frac{c}{n.nb}\sqrt{\frac{3ML}{4hp}} = t$, il cui quarto termine pareggia il tempo di una vibrazione della corda CAaC, che si vibra divisa in due parti unisone.

Paragonando l'aggregato delle prime infinitesime parti unisone

colla

colla corda CEAE, che si agita in tre porzioni distribuita, troverò il tempo speso in una vibrazione della corda ultimamente nominata, cioè $t = \frac{c}{3 \cdot rb}\sqrt{\frac{3Md}{4hP}}$.

Si inferisca la conseguenza, che qualunque sia il numero n delle parti unisone, si scoprirà sempre $t = \frac{c}{n \cdot rb}\sqrt{\frac{3Md}{4hP}}$, formola, che si accomoda a qualsisia grandezza di n o finita, o infinita.

Quindi i tempi di una vibrazione della medesima corda conica, conforme che oscilla intera, o scompartita in 2, 3, 4 &c porzioni unisone, accetteranno la ragione dei termini della progressione armonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c., e perciò dalla serie aritmetica 1, 2, 3, 4 &c verranno dinotati i suoni, o i numeri delle oscillazioni fatte in pari tempo.

XXXV. Ci si renderà facilmente manifesta la posizione dei nodi nella corda CEAE, che oscilla partita nel numero n di membri. Dato principio dal punto C, piglio la serie di 1, 2, 3, 4 &c parti unisone, che continuo sino al numero n di termini, ed è la seguente

$$\frac{d}{\sqrt{cs}},\ \frac{\sqrt{2} \cdot d}{\sqrt{cs}},\ \frac{\sqrt{3} \cdot d}{\sqrt{cs}},\ \frac{\sqrt{4} \cdot d}{\sqrt{cs}}\ \&c.\ \frac{\sqrt{n} \cdot d}{\sqrt{cs}}.$$

Stabilisco il sito del primo nodo facendo $\frac{\sqrt{n} \cdot d}{\sqrt{cs}} : \frac{d}{\sqrt{cs}} :: d : \frac{d}{\sqrt{n}}$, e l'ultimo

termine

termine dell'analogia pareggia la lontananza $= \frac{L}{\sqrt{n}}$ dal primo nodo dal punto C.

Col mezzo della proporzione $\frac{\sqrt{n}\cdot L}{\sqrt{\infty}} : \frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{\infty}} :: L : \frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{n}}$ scopro la distanza $\frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{n}}$ dal punto C del secondo nodo.

Seguitando a battere questa strada, mi si affaccia la serie della distanza dei nodi 1, 2, 3, 4. &c. dal punto C $\frac{L}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{3}\cdot L}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{4}\cdot L}{\sqrt{n}}$ &c. $\frac{\sqrt{n}\cdot L}{\sqrt{n}} = L$, la quale si cangia in quella spettante alla parti unisone infinitesime componenti la corda, quando n tanto si aumenti, che divenga $= \infty$.

In quella guisa che la serie convenente alle parti minime ha tratto l'origine dal partire per ∞ la grandezza $\frac{1}{2}L^2 = \int q\,dq$, posta $q = L$; non altrimenti l'ultima serie può nascere dividendo per n la medesima quantità $\frac{1}{2}L^2$, e mettendo ordinatamente $= \frac{1}{2}q^2$ il detto quoziente, che ne risulta, moltiplicato per 1, 2, 3, 4 &c. e i valori di q, che si deducono da tali equazioni, si agguagliano ai termini dell'ultima progressione.

XXXVI. Conciossiachè per la formola (34.) $t = \frac{c}{nb} q\,dq \sqrt{\frac{3M}{L^3 h p}}$, la quantità $q\,dq$ stia in ragione del tempicello costante, in cui si vibrano le funicelle

unisone

unisone; la lunghezza delle quali $= dy$, addiviene, che partendo per n la grandezza $\frac{1}{2}L^2 = \int y dy$ posta $y = L$, distribuisco la corda in porzioni unisone composte di un egual numero $\frac{\infty}{n}$ di elementi unisoni. Per la qual cosa la proprietà, che i segmenti unisoni siano formati da un pari numero di elementi unisoni, è comune alle corde coniche, cilindriche, triangolari, a cui si debbono aggiungere quella dell'esempio I., la cui grossezza $\varphi x = \frac{G^2 K^4}{\overline{K+x}^4}$. In ciascuna di queste corde i tempi delle vibrazioni di due segmenti presi ad arbitrio accettano la ragione dei numeri degli elementi unisoni, che in essi segmenti sono compresi.

Segnata a piacimento $CK = y$, il numero degli elementi unisoni contenuti nella parte $CLnd$ si riferisce a quello degli elementi unisoni contenuti nella corda intera $Cana$ in proporzione di $y^2 : L^2$; e conseguentemente il numero dei mentovati elementi compresi nel residuo Lnd corrisponde a quello contenuto nella corda totale come $L^2 - y^2 : L^2$. Nella medesima proporzione si riguardano i tempi delle oscillazioni della porzione Lnd, e della corda $Cana$, qualora l'una, e l'altra si vibrano intere, o pure divise in pari numero di parti.

Sarà Lna l'ultima delle porzioni unisone, il cui numero n, nelle

quali

quali si riceanda scompartita la corda $Lene$, se l'assissa $Ek = q$ si ponga uguale a $\frac{\sqrt{n-1} \cdot L}{\sqrt{n}}$, onde ne risulti $q^2 = \frac{n-1}{n} \cdot L^2 = L^2 - \frac{L^2}{n}$. I tempi delle oscillazioni della parte Lre, e della corda $Lene$, che si vibra indivisa, i quali stanno generalmente in ragione di $L^2 - q^2 : L^2$, gli scopriremo nel nostro caso come $\frac{1}{n} : 1$; proporzione, che affatto è conforme a loro compiere.

Delle Vibrazioni delle Corde di inequale grossezza, la quale non viene regolata da una legge costante, e con questa occasione del Suono falso.

XXXVII. Non m'è giammai pervenuto a notizia, che da verun Autore sia stata posta in chiaro la vera ed intima proprietà, mercè la quale parecchi suoni si giudicano falsi dal nostro orecchio. Si potrebbe sospettare, che il suono falso traesse l'origine da un aggregato di suoni dissonanti: ma fatta la riflessione, che con parallelepipedi, o con cilindri si formano dagli stromenti grati all'udito, e che per esempio un cilindro renda un aggregato di suoni assai dissonanti, si ricava la conseguenza, che da una tale unione di suoni non dipenda la natura ~~d...~~ del suono falso. I suoni di un cilindro, come vedremo nel seguente Schediasma XI., s'accostano alle ragioni 9 : 25, 9 : 49, 9 : 81,

9 : 121 ; 9 : 169 &c., dalle quali non calano i suoni acuti, salvoché per la metà crescente del Comma 80 : 81. E qui, giacché mi si presenta l'occasione, non voglio lasciar di riflettere quanto sia falso il supposto di M. Rameau, che tutti i corpi sonori producano l'aggregato di suoni espresso dai numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, e quanto conseguentemente sia debole il fondamento, sul quale appoggia l'accordo per terza maggiore. Quantunque i suoni tutti di un cilindro sieno mutuamente dissonanti, nulladimeno ogni suono è giusto, e giusta parimente la loro unione, nella quale il suono più grave predomina, e copre gli altri.

XXXVIII. Egli è necessario adunque da sorgente diversa derivare l'origine del suono falso. Maneggiando il presente problema delle vibrazioni delle corde inegualmente grosse, mi è riuscito di scoprire l'importante verità, che si danno moltissime corde, che non possono vibrarsi colla legge di un pendolo a velocità, impiegando nelle successive vibrazioni un tempo costante. Tali sono quelle corde, la cui varia grossezza da una sola legge non vien regolata. Una di sì fatte corde pertanto non può vibrarsi isocrona, ma dentro certi limiti fa transito dal grave all'acuto, e dall'acuto al grave. Se una corda può vibrarsi colla legge di un pendolo verticale, prende una di quelle figure, che equilibrate soglio chiamare, perché le forze accelerano, e ritardano

soltanto

soltanto quelle particelle, a cui sono applicate, nè si dà communicazione di moto da una particella alle altre: le corde per gran tratto [illegible], di cui parliamo, sono sempre [illegible], ed il moto passa continuamente da particella a particella, senza che possano giammai percuotere ad una egual [illegible] figura. Da ciò procede l'ineguaglianza derivata dalle loro vibrazioni, e le [illegible] suoni. Chiudendo i [illegible] cavità, per cui suono è giusto, perfetto di più quell'unisono in altro, che produca un suon falso, i tali sono frequentemente la cavità di minugia, non otterrò mai perfettamente il [illegible], sembrandomi la seconda ora unisona colla prima, ora più grave, ed ora più acuta; segno evidente del suo moto incostante. Or ciò mostra chiaramente donde generi del suono falso: o qual corpo sonoro produce un suono falso, le [illegible] non sono [illegible], ma stando fra di loro unite confuse, con una perpetua vicenda passano dal grave all'acuto, e dall'acuto al grave in [illegible] [illegible]

XXXIX. Non voglio tralasciar di notare, sembrarmi probabilissimo, che trattandosi di un [illegible] orecchio musico dipenda dalla struttura del nervo uditorio, [illegible] capace di oscillazioni isocrone, si [illegible] perfettamente [illegible] [illegible], e concependole li [illegible] precisione, gli paragona insieme, ed intende l'armonia

Schediasma X.

armonia con diletto. Ma se il nervo mentovato non impiega nel fare le sue vibrazioni un tempo costante, in cambio di oscillare esattamente unisono ai suoni esterni, porta all'anima dei suoni falsi, la quale perciò forma un'idea imperfetta dell'armonia, e poco piacere ne raccoglie. Si conferma viepiù la detta congiettura osservando, che se qualcuno sfornito d'orecchio musicale vuol cantare all'unisono con un altro, non intona mai giusto; perchè le voci del compagno vengono con alterazione trasferite all'anima del sensorio.

XXXX. L'idea stabilita del suono falso riceverà maggior lume dal problema, che tratta delle vibrazioni della corda, la cui ineguale grossezza non soggiace alla medesima legge. Non possono tali corde accomodarsi giammai ad una figura equilibrata. Sia per esempio la corda formata da due porzioni, le cui grossezze ricevano due leggi diverse; potrà bene ciascuna parte ripiegarsi in una curva equilibrata; ma in quel punto, nel quale si fa transito da una legge all'altra, accaderà subitaneamente, e succedendo insensibili, ai continuare laterali comunicazioni di moto da particola a particola della corda, non giungerà mai essa a ricevere una figura bilanciata compiutamente, ogni elemento della quale si vibri nel medesimo

tempo

tempo. Ne seguirebbe maggiore contrasto, se da molte leggi dipendesse la grossezza della corda. S'inferisca, che le varie particole della nostra corda si vibrano in tempi diversi, e che sendo sempre di sinuata differente la curva, a cui si conforma, non sono nemmeno costanti i tempi delle vibrazioni della stessa particola. Quindi ne risulta un suono incerto, e falso, che intonar non si può, e che riesce sommamente fastidioso all'orecchio.

XXXXI. Il ridurre a computo la velocità delle particole di sì fatta corda, io lo giudico un problema intrattabile. Sia f la forza applicata ad una particola, si farà fdt uguale all'incremento di quantità di moto operato direttamente in essa particola, ed altresì agli incrementi, che a cagione della comunicazione del moto succedono nelle altre particole; sono condotto sicuramente al paralogismo da questa formola, la quale non si avvera salvochè nell'ipotesi, che tutte le particole si muovano con pari celerità. La formola fds uguale alla aumentazione di forza viva cagionata in tutte le particole è giusta, ma per usarla farebbe di uopo sapere la legge della velocità di esse particole, e qual porzione dell'azione fds s'impieghi ad accrescere la forza viva di ciascuna particola. Quello, che si è detto di un'azione, s'applichi all'altre

tutte

tutta, essa conchiuda, che la forza motiva di una particola non dipenda solo dall' azione della forza, che direttamente la spinga, ma ancora mediante la comunicazione del moto dalle azioni della forza, che sollecitano le rimanenti particole. Se nel principio del moto la corda è ripiegata in una figura bilanciata, l'equazione di tale curva mi rende noto le forze, che spingono i punti della corda. E perchè nei susseguenti istanti le curve sono sempre analoghe alla primitiva, conosco i valori della forza in ciascuna curva, ed è in mia potestà il calcolare la velocità di qualsivoglia particola, ed il tempo di una sua vibrazione. Ma se la corda è incapace di accomodarsi a curva equilibrata, sappiasi l'equazione della curva, a cui s'adatta nel cominciamento del moto, e per conseguenza siano conosciute le forze, che sollecitano le particole della corda; quale frutto ne raccoglierò da tal cognizione? Sendo nei susseguenti istanti le curve di indole differentissima e ignota, rimango allo oscuro dei valori della forza, nè mi è concesso di computare le velocità, e i tempi delle vibrazioni. Non ho voluto risparmiare parole, onde mettere in vista le insuperabili difficoltà, che si incontrano maneggiando il problema delle vibrazioni delle corde, la cui ineguale grossezza non viene regolata da legge costante. Si contenti dunque chi legge, ch' io

procuri

Schediasma X.

procuri di rischiarare questo argomento con un esempio, che fra tutti è il più semplice.

Esempio VI.

Della vibrazione della corda, le cui due metà sieno di inuguale grossezza.

XXXXII. La metà A'C (fig. 14.) della corda A'A sia più sottile, ovvero meno densa dell'altra metà CA. Nel primo istante del movimento sia essa piegata nella curva A7A', la cui equazione $x = \frac{L \cdot \text{Arco Rag. c Seno } y}{2b}$, posta $AA' = L$, $C7 = c$, $A7 = x$, $7K = y$, ed essendo b il quadrante circolare del raggio c. Le due metà della curva sono bilanciate, e la stessa proprietà competerebbe alla curva intera A7A', se le sue due metà fossero ugualmente grosse. Veggasi lo Schediasma IV. Le forze sollecitanti i punti K, H si riferiscono nella proporzione delle ordinate 7K, &H, e le forze acceleratrici accettano la ragione composta, diretta delle predette ordinate, ed inversa delle grossezze delle semicorde A'7, A7. Segno varj elementi della corda di pari lunghezza 7G, GH &c. 7e, eD &c. essendo l'ordinata C7 comune ai due elementi 7e, 7G, le forze acceleratrici staranno in ragione reciproca delle grossezze di essi elementi. Se dunque non fossero connessi nel punto 7, l'elemento 7e si muoverebbe più celeremente

dal

dal 7 G. La loro unione fa sì, che il punto 7 ad entrambi comune debba acquistare una media velocità, il che si ottiene mediante la comunicazione del moto dall'elemento e7 al 7G. Ritardato in tal guisa l'elemento e7, ritarda esso l'elemento De, e viene da questo accelerato, e l'accelerazione si comunica agli elementi 7G, GH &c., ed il ritardamento agli elementi Dk &c. Si proseguisca il discorso con questo metodo, e si comprenderà, che rispettivamente a quella velocità, che avrebbero acquistato i punti della semicorda A'7, se ancora la 7A fosse della stessa grossezza, i nominati punti sono tanto più ritardati, quanto maggiormente si discostano dal punto A', e si accostano al punto 7. In riguardo poi alla velocità, che competerebbero ai punti della semicorda 7A, se altresì la 7A avesse con essa comune la grossezza, i predetti punti si vanno sempre più accelerando, secondochè si allontanano dal punto A, e si avvicinano al punto 7. Da ciò si raccoglie, che quando il punto 7 sarà pervenuto in C, la semicorda A'7 avrà passato l'asse A'CA, e la semicorda A7 ad esso non sarà giunta per anche, dimodochè la corda avrà presa la figura A'MCNA.

La nostra corda sia tutta distesa sotto l'asse A'CA, conformandosi alla curva A'fA (Fig. 18),

e

e seguiti ancora a muoversi per la direzione Cf. L'elemento fe verrebbe più ritardato dell'elemento fg, se non fossero congiunti nel punto f. In tale circostanza pertanto succede tutto il contrario di quello, che abbiamo notato avvenire negli elementi Da; DG (Fig. 14.), e l'elemento fg (Fig. 16.) fa che meno si ritardi l'elemento fe. Con un raziocinio analogo a quello, che ha adattato alla Figura 14., si conchiuderà, che mediante la comunicazione del moto, la particola fe, ed &c vengono tanto meno ritardate, quanto cresce la loro distanza dal punto A'; e le particole fg, gh &c. ricevono maggiore ritardamento, quanto più si allontanano dal punto A. Quindi si inferisce, che gli elementi della corda si vibreranno in tempi diversi, e che procedendo da A' verso A, giungeranno allo stato di quiete gradatamente sempre più tardi; rendendo suoni, che dentro certi limiti passeranno dall'acuto al grave.

Si aggiunga, che sendo la curva A'MCNA (Fig. 15.), A'fA (Fig. 16.) &c. di indole sempre diversa a cagione della continue comunicazioni laterali di moto, nè ritornando mai la corda a ripigliare la primitiva figura A'DA (Fig. 14.), addiviene che la stessa particola non si vibri in tempo costante, ma fra determinati confini faccia transito dall'acuto al grave, e dal grave all'

acuto

acuto. Il perché e le particole diver-
se, e la stessa particola producendo un
suono incerto, [illegible] non si può
a [illegible] di falsità cagione
di questo effetto dipende da diversi
[illegible] dalla forza acceleratrice degli
elementi [illegible], il quale fa sì che
non cessi mai la [illegible] di moto,
e che per conseguenza la corda non pos-
sa ottenere [illegible] darsi ad una
figura del genere delle bilanciate
alle quali soltanto compete la [illegible]
[illegible]

Nella oscurità della materia,
che ho per le mani, basti questo saggio,
il quale per altro sembrami, che [illegible]
chiari quanto basta la natura del
Suono falso.

Delle vibrazioni sonore dei Cilindri.

I. Di parecchi cilindri di metallo, o di creta si formano certi stromenti, che riescono grati all'orecchio. Di tali corpi mia intenzione si è di indagare le oscillazioni, le quali, come vedremo, vengono regolate da leggi diversissime da quelle della corda cilindrica. Quantunque io abbia preso l'essenziale di questa soluzione dall'Appendice sopra le curve elastiche aggiunta dal dottissimo Signor Leonardo Eulero alla sua profonda Opera, *Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, nulladimeno non isdegnano di leggerla i Matematici, sì perchè ho procurato di dilucidar la materia per se stessa astrusissima, sì perchè mi è riuscito di far per altro qualche non dispregevole scoperta, e di notare altresì alcun piccolo neo, che andrò opportunamente segnando, nelle speculazioni per altro sublimi del chiarissimo Autore.

Per camminar passo passo, si rende necessaria la dimostrazione del seguente teorema.

Se nello distendendosi le lunghezze inferiori di due cilindri, si allunghino solamente le superiori, o al rovescio, e ciò per opera di due forze insieme eguali normali alle basi dei cilindri, ed applicate

applicate ai punti analoghi de' loro diametri situati ne' piani, in cui giacciono le mentovate opposte lunghezze, gli allungamenti corrispondenti a' punti analoghi dei diametri stessi stanno in ragione composta, diretta della lunghezza de' cilindri, ed inversa della rigidità della materia, onde sono formati, e dalla loro basi, o sia dei quadrati dei loro diametri.

11. Ci siano (fig. 14.) due cilindri OV, ov, i quali si trovino in tali circostanze, che nulla dilatandosi le lunghezze inferiori VM, vm, si distendano a grado a grado le superiori, dimodochè gli allungamenti si eguaglino alle ordinate dei triangoli MOL, mol. Si fingano totalmente inflessibili le loro basi MGOI, mgoi, e suppongasi, che i mentovati allungamenti siano cagionati da due forze infinitesime uguali applicate con direzione normale alle dette basi per esempio all'estremità O, o dei diametri MO, mo collocati ne' piani VL, vl: dico che le distensioni OL, ol corrispondenti ai punti analoghi O, o serbano la proporzione composta, diretta dalla lunghezza SO, so dei cilindri, e reciproca della rigidità della materia, onde constano, e dei quadrati dei loro diametri.

Schediasma XI.

Si segnino prima le linee piene MP, mp, quindi le infinitesime Rr, pr proporzionali ai diametri MO, mo; e si tirino parallele alle lunghezze VM, vm le linee KZ, NX; kz, nx. Per tali coppie di linee passino due piani normali ai piani VK, vk, e questi segneranno due parallelepipedi, le cui lunghezze KP, kp, e le basi GH, gh. Essendo MO : MP :: mo : mp, MO : MP :: OL : PZ, mo : mp :: ol : pz, si verifica parimente l'analogia OL : PZ :: ol : pz, la quale ci insegna, che gli allungamenti dei due cilindri in siti analoghi abbracciano la medesima proporzione. Vengano le distensioni PZ, pz direttamente effettuate nei solidi KR, kr da due forze menome uguali. Hò dimostrato nel numero IV. dello Schediasma I., che gli allungamenti prodotti da forze infinitesime pari in due corde elastiche, che non sian tese, stanno come le loro lunghezze divise per il prodotto della rigidità della materia, onde sono composte, nelle loro basi: e le dimostrazioni ivi addotte, che non riporto presentemente, si adattano interamente ai parallelepipedi KR, kr. Per la qual cosa le distensioni PZ, pz serberanno la nominata relazione: ma le basi GH, gh, che sono porzioni simili delle basi circolari dei cilindri, si riferiscono nella ragione dei quadrati dei diametri MO, mo; dunque le distensioni PZ, pz dei solidi KR, kr, ed altresì quella di tutte l'altre coppie di solidi fondati su basi simili, e similmente situati, che in pari numero compongono i nostri cilindri, accettano la proporzione delle lunghezze VM, vm divise per il prodotto della rigidità della materia nel quadrato dei diametri

diametri dei cilindri. Si cavi la conseguenza, che in qualunque pajo di parallelepipedi collocati in siti analoghi, gli allungamenti, che si riguardano nella mentovata ragione, sono cagionati da due forze uguali.

Si restringano ora i cilindri per gli spazietti LQ, lq parti infinitesime simili degli spazj OL, ol; ed agevole riuscirà la riflessione, essere OL : AZ :: QL : YZ :: ol : pz :: ql : yz; e che perciò gli spazietti analoghi QL, ql; YZ, yz si riferiscono nella stabilita ragione, nella quale pure si riguarderanno le variazioni menomissime delle forze a coppia a coppia uguali applicate ai punti analoghi Z, z; L, l &c. Lo stesso rapporto parimente accetteranno gli aggregati di queste variazioni. Se tolte di mezzo tali forze infinite di numero, io voglio collocare nei siti L, l due forze equipollenti per le direzioni OL, ol, egli è di uopo, che alla somma delle variazioni delle forze levate si agguagli la unica variazione della forza sostituita. Quindi le variazioni delle due forze surrogate dovranno stare come QL : ql: ma le dette forze reagiscono per gli spazj QL, ql; dunque le variazioni sono come gli spazj, per cui resistono le due forze, il che non può verificarsi se non nel caso, che siano uguali esse forze. Se due forze uguali pertanto normali alle basi dei cilindri OV, ov, ed applicate ai punti analoghi O, o dei diametri MO, mo situati nei piani VL, vl fanno equilibrio colla forza elastica dei cilindri stessi, le corrispondenti distensioni OL, ol devono

serbare

serbare la ragione composta, diretta dalle lunghezze S.O; se dei cilindri; ed inversa dalla rigidità della materia, da cui sono formati, e dei quadrati dei loro diametri.

Determinare la forza, la quale supponendosi applicata per una data direzione in un sito determinato, sia equipollente alla forza elastica di una massima porzione di cilindro infinitamente poco incurvato.

III. Sia A V M Z (Fig. 18.) la curva di massima piegatura, in cui curvandosi si sia adattato un cilindro, ed AC, CM siano le coordinate l'una all'altra normali. La lunghezza pochissimo incurvata MV della porzione elementare LV del detto cilindro venga combaciata dal circolo MV descritto col raggio infinitamente lungo DM. Alla linea DVS per il punto M conduco parallela la retta MO. Potendosi supporre, che nel ripiegarsi la lunghezza inferiore MV del mentovato cilindretto non abbia ricevuta alterazione, si sarà egli superiormente dilatato per OL.

Fingasi collocata in A una forza equipollente a tutte quelle, che come vedremo sono parallele alle ordinate MC, le quali fanno equilibrio col cilindretto LV. Se io risolverò questa forza in due, una parallela, e l'altra perpendicolare alla direzione MV di esso cilindro, noverò la prima niuna rispettivamente alla seconda; perchè discostandosi infinitamente poco la curva AVMZ dalla linea retta AB, la direzione della forza, che si risolve, è pressochè normale alla

linea

linea MV. La forza menomissima paralle-lela ad MV allunga tutto il cilindretto LV egualmente, e la perpendicolare rispettivamente infinita ripiega il detto cilindro, e cagiona le distensioni espresse dalle ordinate del triangolo MOL. Ecco adunque, che trascurando il allungamento comune a tutto il cilindro, siccome operato da una forza adequatamente uguale a nulla, mi è concesso il supporre, che la lunghezza inferiore MV ritenga la sua naturale misura.

III.

Chiamo la lunghezza del cilindro MV = ds; il raggio osculatore DM = R, il diametro di esso cilindro ML = D, e la rigidità della materia, che lo compone, = r. La similitudine dei triangoli DMV, MLO mi somministra l'analogia

$$DM : MV :: ML : LO$$
$$R : ds :: D : \frac{D\,ds}{R},$$

da cui si ricava $LO = \frac{D\,ds}{R}$. Una forza costante = 1, che agisse per la direzione OL, allungherebbe il cilindro, conforme ho dimostrato al numero II. per lo spazio proporzionale a $\frac{ds}{rD^2}$, il quale sta in ragione composta, diretta della lunghezza del cilindro, e della ragione inversa del quadrato del diametro, o sia base del cilindro, e della rigidità della materia, dalla quale è formato. Essendo pertanto nello stesso cilindro le distensioni come le forze medesime, che le cagionano, se l'allungamento come $\frac{ds}{rD^2}$ è prodotto dalla forza = 1, ne segue, che per ottenere

la

la dilatazione $LQ = \frac{D\,ds}{k}$ ci vorrà la forza proporzionale a $\frac{D^3 v}{k}$.

Si restituisca il nostro cilindro per lo spazietto LQ porzione inassegnabile dello spazio LO, ed il raggio osculatore MO si allunghi, e divenga uguale ad $MG = k + dk$: troveremo la linea $QO = \frac{D\,ds}{k+dk}$, la quale sottratta da $LO = \frac{D\,ds}{k}$, ci dà $LQ = \frac{D\,dk\,ds}{k^2}$. Quindi la variazione della forza proporzionale a $\frac{D^3 v}{k}$, che per lo spazio LQ si conserva costante, starà come $\frac{D^4 v\,dk\,ds}{k^3}$. Taglio $MT = \frac{1}{k}$, e per il punto T conduco TR parallela ad LQ. Dalla simiglianza dei triangoletti MLQ, MTR deduco l'analogia

$$ML : LQ :: MT : TR$$
$$D : \frac{D\,dk\,ds}{k^2} :: \frac{1}{k} : \frac{dk\,ds}{k^3},$$

che mi addita il valore di $TR = \frac{dk\,ds}{k^3}$.

Voglia collocarsi in T colla direzione RT una forza equipollente a quella, che si è applicata in L, e che per conseguenza fa un equilibrio colla elasticità del cilindro LV. Se le due forze in L, ed in T hanno ad essere equipollenti, le loro variazioni per gli spazj LQ, TR debbono essere uguali. Si inferisca, che divisa la variazione della prima forza, proporzionale a $\frac{D^4 v\,dk\,ds}{k^3}$ per lo spazietto $TR = \frac{dk\,ds}{k^3}$, per cui variagisca la seconda, ne proverrà la grandezza della forza stessa applicata nel sito T proporzionale a $D^4 v$, cioè a dire in ragione composta

composta

composta del quadrato quadrato del diametro del cilindro che si vibra, e della rigidità della materia, dalla quale è formato.

Sia M la massa di tutto il cilindro, L la sua lunghezza, g la sua gravità specifica, o densità, e la quantità $\frac{M}{gL}$ esprimerà la base del cilindro, la quale serba la ragione del quadrato D^2 del diametro. Sostituendo in vece di D^4 la grandezza proporzionale $\frac{M^2}{g^2L^2}$, troveremo stare come $\frac{M^2 r}{g^2L^2}$ quella forza applicata alla distanza $MT = \frac{1}{R}$ dal punto M colla direzione RT, che forma equilibrio colla elasticità del cilindretto LV, la cui minima curvatura $= \frac{1}{R}$. Nominata C la detta forza, avremo $\frac{k r M^2}{g^2L^2} = C$, ed il coefficiente k sarà costante in tutti i cilindri.

IV. Se col metodo da me tenuto rispettivamente ai cilindri avessi cercato il valore della forza C nelle lamine elastiche, mi sarebbe riuscito di trovarlo in ragione composta della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del cubo della sua grossezza. Alla forza C il Signor Eulero dà il titolo di elasticità assoluta della lamina, e senza dimostrarlo, l'asserisce proporzionale al prodotto della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del quadrato della grossezza. Questo sbaglio influisce nella legge dei tempi delle vibrazioni delle lamine elastiche determinata dal nostro Autore, la quale non corrisponde ai fenomeni, salvochè nella circostanza, che le diverse lamine siano di pari grossezza.

Trovare col mezzo degli esperimenti il valore della forza e.

V. Alla muraglia perpendicolare BK sia immobilmente raccomandato il cilindro AVMZ, il quale prima d'essere incurvato teneva la posizione HZ a squadra della linea ZB. Avverto, che la retta HZ tocca la curva AVMZ nel punto Z. Una forza p applicata al punto estremo A con direzione sempre parallela ad ZB abbia piegato il cilindro nella curva AVMZ, e formi con esso equilibrio, e con tutti i suoi elementi. Per il punto A si tiri AB parallela ad HZ, e dal punto M si lasci cadere la ordinata MC normale ad AB. Si tagli $MQ = AC$ e si conduca la diagonale AM. Chiamo $AB = a$, $BZ = b$, $AC = x$, $CM = y$, e giacchè il cilindretto LV stia in equilibrio colla forza p, se supponiamo, che invariata rimanga la curvatura del resto del cilindro, e che solamente l'elasticità del cilindretto LV eserciti sua medesima azione, questa dovrà essere uguale la reazione della forza p. In cambio della elasticità del cilindro LV io posso sostituire la forza equivalente e applicata in T, ovvero in R, la quale agisca per lo spazietto RT. Il punto R della linea MR descriverà l'archetto RT, ed i raggi $MT = MQ$, ed MA segneranno gli archi TQ, AZ simili. Dal punto Z si cali ZN normale al RT. Essendo la direzione della forza p perpendicolare ad AB, e agisca per lo

spazio

spazio NZ, mentre la forza e agisca per lo spazio RT. Avremo adunque per la leggi dello equilibrio $P.NZ = e.RT$. Essendo simili i triangoli MAC, AZN, scopriremo essere $MA : AZ :: AC : NZ$: ma per la simiglianza dei settori MAZ, MIe, $MA : AZ :: MI : Ie$; dunque $AC : NZ :: MI : Ie$; e giacchè per la costruzione $AC = MI = x$, sarà parimente $NZ = Ie$. Avremo pertanto $P.Ie = e.RT$, e surrogando in luogo degli archetti Ie, RT i raggi proporzionali $MI = x$, $MR = \frac{1}{k}$; $Px = \frac{e}{k}$.

VI. Chiamano i Meccanici la quantità Px il momento della forza P rispettivamente al punto M, e dovendo questa far equilibrio colla elasticità del cilindro, il cui momento $\frac{e}{k}$, stabiliscono l'equazione $Px = \frac{e}{k}$. Ho stimato opportuna cosa rischiarar la materia, deducendo la nostra formola dalla eguaglianza delle azioni menomissime, che mutuamente si impediscono, nella quale consiste il vero fondamento dello equilibrio. Fa vedere il progresso del mio raziocinio, che le grandezze Px, $\frac{e}{k}$ sono proporzionali alle azioni eguali, e contrarie, l'una delle quali serve all'altra di impedimento, della forza P, e della elasticità del cilindro LV. Quindi siccome rettamente si nomina Px il momento della forza P, così $\frac{e}{k}$ si dee appellare il momento della forza elastica del cilindretto LV, la

cui

cui curvatura $\frac{1}{k}$; e per questa parola momento altro non si deve intendere, salvoche' la mentovate virtuali infinitesime azioni uguali, e contrarie, e quantità ad esse proporzionali.

VII. Dopo questa forse non inutile digressione torno in sentiero, e ripigliate per mano l'equazione $px = \frac{e}{k}$, osservo, che preso siccome costante l'elemento dx dell'assissa, abbiamo il raggio osculatore $k = \frac{ds^3}{-dx\,ddy} = \frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$. Ponendo in opera un tal valore, trovo $px = \frac{-e\,dx\,ddy}{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}$, o sia $px\,dx = \frac{-e\,dx^2\,ddy}{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}$; formola, che riceve la seguente integrazione $p \cdot \overline{\tfrac{1}{2}x^2+f} = \frac{-e\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, la quale maneggiata mi dà

$$dy = \frac{-p\,dx \cdot \overline{\tfrac{1}{2}x^2+f}}{\sqrt{e^2 - p^2 \cdot \overline{\tfrac{1}{2}x^2+f}^2}}.$$

Si determina la costante f riflettendo, che nel sito Z la tangente HZ e' parallela all'assissa AB; laonde $\frac{dy}{dx} = 0$, e perciò $\tfrac{1}{2}x^2+f = 0$, ovvero $f = -\tfrac{1}{2}x^2$: ma in questo caso $x = AB = a$; dunque $f = -\tfrac{1}{2}a^2$. Fatto uso di questo valore, ed adempiuti i necessarj calcoli, ci si presenterà

$$dy = \frac{\overline{a^2-x^2} \cdot dx}{\sqrt{\frac{4e^2}{p^2} - a^4 + 2a^2x^2 - x^4}}.$$

Si adatti all'estremità A del cilindro AVMZ una forza, o peso P assai piccolo rispettivamente alla forza e; dimodochè il cilindro stesso si ripieghi per una saetta ZB fisicamente menoma, ma che però possa

accuratamente

accuratamente misurarsi. In sì fatta ipotesi la quantità $\frac{4e^2}{p^2}$ sarà talmente grande, che si potrà in riguardo alla pratica trascurare la grandezza $-a^4+2a^2x^2-x^4$. Averemo pertanto $dy = \frac{\overline{a^2-x^2}\cdot dx}{\frac{2e}{p}}$, ed integrando $y = \frac{p\cdot\overline{a^2x-\frac{1}{3}x^3}}{2e}$; ma quando $x=a$, $y=b$; dunque $b=\frac{pa^3}{3e}$, e finalmente $e=\frac{pa^3}{3b}$, valore della forza e, che non si discosterà dal vero sensibilmente, purchè la curvatura del cilindro sia picciolissima.

VIII. Avendo dimostrato essere e come vD^4, starà per conseguenza vD^4 come $\frac{pa^3}{3b}$, ed v come $\frac{pa^3}{3bD^4}=\frac{e}{D^4}$. Col mezzo adunque della premessa esperienza si può scoprire la proporzione fra le rigidità delle materie, onde sono composti i cilindri. Stabilirò in progresso al numero XXV. un altro canone ugualmente semplice, che serva a determinare la detta proporzione.

IX. Nella formula $dy = \frac{\overline{a^2-x^2}\cdot dx}{\sqrt{\frac{4e^2}{p^2}-a^4+2a^2x^2-x^4}}$ si faccia $\frac{2e}{p}=c^2-a^2$, e conseguentemente $\frac{4e^2}{p^2}=c^4-2c^2a^2+a^4$. Supponendosi $\frac{2e}{p}$ una quantità assai grande rispettivamente ad x, e ad a, sarà parimente tale la quantità c, come agevolmente raccogliesi dalla equazione assunta $\frac{2e}{p}=c^2-a^2$. Sostituito

in

in cambio di $\frac{2e}{p}$ il suo valore, troveremo $dy = \frac{\overline{a^2-x^2}.\,dx}{\sqrt{c^4-2c^2a^2+2a^2x^2-x^4}}$. Se nel denominatore io trascuro i soli due termini $2a^2x^2 - x^4$, la cui somma è fisicamente nulla non solo in riguardo a c^4, ma ancora per rapporto a $-2c^2a^2$, mi si presenta la formola $dy = \frac{\overline{a^2-x^2}.\,dx}{\sqrt{c^4-2c^2a^2}}$, che si adegua alla seguente $dy = \frac{\overline{a^2-x^2}.\,dx}{c^2-a^2} = \frac{\overline{a^2-x^2}.\,dx}{\frac{2e}{p}}$, da cui ricavo $e = \frac{pa^3}{3b}$.

Ma se io trasando altresì il termine $-2c^2a^2$, ho l'equazione $dy = \frac{\overline{a^2-x^2}.\,dx}{c^2}$, la quale integrata mi dà $y = \frac{a^2x - \frac{1}{3}x^3}{c^2}$. Corrispondendo $y = b$ ad $x = a$, troveremo $b = \frac{2a^3}{3c^2}$, e ponendo in luogo di c^2 il suo valore $\frac{2e}{p} + a^2$, $3b = \frac{2a^3}{\frac{2e}{p}+a^2}$. Dal maneggio di questa formola si ricava $e = \frac{pa^2.\,\overline{2a-3b}}{6b}$. Il Signor Eulero assegna alla forza e un tal valore, il quale è meno semplice, e meno esatto di quello, che da me è stato determinato.

Determinare l'equazione della curva, a cui si adatta un cilindro, che si vibra.

X. Tenga il cilindro prima di vibrarsi la positura rettilinea ACB (Fig. 19) e messo poscia in oscillazione si adatti alla curva aecfb, la quale si discosti dalla

linea

linea retta ACB per minimi spazj. Sia la lunghezza del cilindro acb, ovvero ACB $= L$, la sua massa $= M$, il raggio osculatore in $M = k$, il momento della elasticità del cilindro nel sito medesimo $= \frac{e}{k}$. Si chiami inoltre $Aa = b$, $AP = aM = x$, $PM = y$. Effettuando il nostro cilindro nel tempo stesso le sue minime vibrazioni più, o meno estese, dee necessariamente oscillare colla legge di un pendolo a cicloide. Sia f la lunghezza del pendolo semplice isocrono, e giacchè questo, mentre gli resta da scorrere lo spazio $MP = y$, viene animato dalla forza acceleratrice $\frac{y}{f}$, tale sarà altresì la forza acceleratrice del cilindro nel sito M. La massa di un elemento di esso cilindro, la cui lunghezza dx, si eguaglia ad $\frac{M\,dx}{L}$, la quale moltiplicata per $\frac{y}{f}$, mi dà la forza sollecitante il detto elemento collocato in $M = \frac{My\,dx}{Lf}$.

Il cilindro dopo compiuta una oscillazione si trovi nella posizione aCb, e se in tale istante a tutti i punti di esso cilindro si applicheranno le convenienti forze $\frac{My\,dx}{Lf}$ con direzioni contrarie, per esempio MH, mh, a quelle delle forze sollecitanti, non seguirà più moto, ed il cilindro si troverà in equilibrio. Le forze applicate alla curva aM stanno in equilibrio colla forza elastica del cilindro in M; ed in fatti se questa si minorasse, tutte le dette forze si porrebbero in azione.

Quindi

Quindi l'aggregato dei momenti delle mentovate forze dee pareggiare il momento $\frac{e}{k}$ della forza elastica nel sito M.

Nomino p la somma delle forze applicate alla curva am, e dp per conseguenza sarà la forza, che tira l'elemento mu per la direzione mh. Il momento di essa forza rispettivamente al punto M, mettendo $Ap = q$, si eguaglia ad $\overline{x-q}\,dp$. Per trovare la somma desiderata dei momenti delle nostre forze in riguardo al punto M, si consideri per poco il detto punto; e l'ascissa $AM = x$ come costante, prendendo $Ap = q$ in qualità di variabile. Avremo pertanto l'aggregato dei momenti rispettivamente al punto M delle forze applicate alla porzione di curva am = $xp - \int q\,dp$: ma $\int q\,dp = qp - \int p\,dq$; dunque la mentovata somma $= xp - qp + \int p\,dq$. Giunga il punto m in M, e diverrà $q = x$, $dq = dx$. Sostituiti questi valori, troveremo la somma dei momenti per rapporto al punto M di tutte le forze applicate alla parte di cilindro aM = $\int p\,dx$. Ora dovendosi un tale aggregato agguagliare al momento $\frac{e}{k}$ della elasticità del cilindro nel sito M, siam pervenuti alla equazione $\frac{e}{k} = \int p\,dx$; e surrogando in vece di p l'eguale grandezza $\int \frac{My\,dx}{2f}$,

$$\frac{e}{k} = \int dx \int \frac{My\,dx}{2f}.$$

Nel caso presente, in cui la flussione costante dx dell'ascissa si adegua all'elemento ds della curva,

si verifica essere $k = \frac{dx^2}{ddy}$, e perciò avremo $\frac{e\,ddy}{dx^2} = \int dx \int \frac{My\,dx}{Lf}$, e differenziando la differenza si trova $\frac{e\,d^3y}{dx^2} = dx \int \frac{My\,dx}{Lf}$, e nuovamente differenziando $e\,d^4y = \frac{My\,dx^4}{Lf}$, equazione alla curva cercata a e c z b.

XI. La somma dei momenti rispettivamente al punto M delle forze applicate al rimanente del cilindro M e c z b esser dee uguale, e contraria alla somma dei momenti delle forze applicate alla porzione a M, e trovasi, e l'altra di queste somme dee pareggiare il momento della elasticità del cilindro nel sito M $= \frac{e}{k}$. Così l'elemento di cilindro collocato in M sta in equilibrio, essendo preso in mezzo da due aggregati di momenti eguali, e contrarj. Se avessi considerati i momenti delle forze applicate alla parte del cilindro M e c z b, fatta la riflessione essere BP $= L - x$, ed il suo incremento $= -dx$, avrei scoperto $\frac{e\,ddy}{dx^2} = \int -dx \int \frac{-My\,dx}{Lf}$, espressione, che ci guida alla formola testè ritrovata $e\,d^4y = \frac{My\,dx^4}{Lf}$.

La premessa avvertenza me ne suggerisce un'altra, cioè, che la somma dei momenti rispettivamente ai punti estremi a, b delle forze applicate a tutto il cilindro a e c z b deve uguagliarsi a nulla, siccome quella

quella, che ha da formare equilibrio coll' aggregato dei momenti delle forze applicate al residuo del cilindro, perchè nei due mentovati casi pareggia il nullo. Posta dunque $x = 0$, o pure $x = AB = \alpha$, avremo $\frac{e}{k} = \frac{e\,ddy}{dx^2} = \int \pm dx \int \pm \frac{My\,dx}{\alpha f} = 0$. Si cavi per conseguenza essere nulla la curvatura $\frac{1}{k}$ del cilindro nei siti a, b, e nullo parimente il momento $\frac{e}{k}$ della sua elasticità.

XII. Le forze MH uguali, e contrarie a quelle, che tentano di far reciprocare il cilindro, e spingono i suoi punti, per esempio M, verso la linea retta AB, debbono trattenere il cilindro stesso nella posizione a e c Z b totalmente immobile, senza che possa in esso seguire il moto progressivo per linea, o la altra per direzione Cc, cC, o moto di giramento intorno qualsivoglia punto. Questo ultimo movimento non succederà, quando i momenti delle forze applicate a destra, e a sinistra di qualunque punto M siano uguali, e contrarj, e che per conseguenza facciano equilibrio. Non accaderà nè pure il moto progressivo, qualora si adempia la condizione, che l'aggregato delle forze traenti il cilindro per la direzione cC pareggi quello, che il tira per la direzione contraria Cc. Abbiamo veduto, che la somma delle forze applicate alla porzione aM s'ragguaglia ad $\frac{M}{\alpha f}\int y\,dx$; ma $\int y\,dx$ dinota l'aja aeMPA; dunque la nominata somma delle forze applicate alla parte di cilindro

cilindro aM scelta ad arbitrio è sempre proporzionale alla corrispondente aja, au MPA. Dovendo il cilindro essere ugualmente tirato per le due direzioni opposte cC, Cc, egli è di uopo, che la aja positiva aCA + bZB pareggi la negativa CZcC, dimodochè facendo $x = AB = L$, si trovi $\int y dx = 0$.

Osserveremo in progresso, che il cilindro AB si può oscillando adattare ad infinite curve, le metà delle quali ta=gliano l'asse AB in un numero pari di punti, ed il rimanente in un numero impari. Le più semplici fra le dette curve si veggono espresse nelle figure 19, e 20. Pretende il Signor Eulero, che le curve del secondo genere non servano per le vibrazioni della lamina elastica, ma questa sua osservazione non è conforme alla verità, potendosi anco rispettivamen=te a tali curve determinare le costanti, che si aggiungono nelle integrazioni, di maniera che siano eguali i momenti delle forze a destra, ed a sinistra di un qualunque punto, e che di più ad $x = AB = L$ corrisponda $\int y dx = 0$. L'espe=rienza favorisce i miei pensamenti; imperocchè sostenendo in bilico una la=mina con un dito, ed indi percuotendola, si sente chiaro quel suono, che rende la lamina stessa, mentre si uniforma alla curva della figura 20., e che non viene punto disturbato dal dito, il quale

tocca

tocca la lamina nel sito immobile C. Il dito applicato in C ammortisce la metà dei suoni della lamina, cioè a dire tutti quelli ch'essa produce, mentre si adatta alle curve del primo genere, nelle quali tutta al punto C (Fig. 19, 24, 28 &c.) si riferisce la massima ordinata Cc.

<u>Integrare l'equazione</u> $\frac{ee f d^4 y}{M} = y\, dx^4$, <u>e determinare i valori delle costanti aggiunte nelle integrazioni.</u>

XIII. Pongasi $\frac{ee f}{M} = c^4$, onde si abbia $c^4 d^4 y = y\, dx^4$. Il celebratissimo Signor Eulero nel Tomo VII. della Miscellanea di Berlino ci ha insegnata la generale integrazione di tali equazioni differenziali di alto grado. Col mezzo di questo metodo, si trova

$$y = A e^{\frac{x}{c}} + B e^{\frac{-x}{c}} + C \,\text{sen.}\, \frac{x}{c} + D \cos. \frac{x}{c} \quad (1.),$$

in cui e dinota il numero, che ha per logaritmo l'unità nella logistica della sottotangente = 1. I logaritmi presi nella suddetta logistica si chiamano naturali, o iperbolici; perchè si suole con essi esprimere la quadratura dell'iperbola. Il lodato Autore nella sua eccellente Introduzione all'Analisi degli infiniti ha computato il valore del numero e, che presa l'unità come protonumero si suol nominare la base della logistica, = 2,7182 814. Ci ha dato parimente nello stesso luogo la serie dei logaritmi iperbolici dall 1. sino

al

al 10. Per i computi, che siam per fare, basta il sapere, che il numero 10. nella tavola ha per logaritmo 1,0000000, e nella logistica iperbolica 2,3025851, e che nella stessa proporzione si deggiono riferire i logaritmi dell'una, e dell'altra logistica, che corrispondono allo stesso numero. Coll'ajuto adunque dei logaritmi della tavola si potrà trovare il logaritmo iperbolico di qualunque numero. Nella sovrapposta formola sen. $\frac{x}{c}$, e cos. $\frac{x}{c}$ dinotano il seno, ed il coseno dell'arco $\frac{x}{c}$ preso nel cerchio, il cui raggio $= 1$. A, B, C, D sono quattro costanti introdotte nelle altrettante integrazioni, a cui è di uopo assegnare i convenienti valori.

Si prendano nella nostra equazione la prima, ed indi la seconda, la terza, e la quarta differenza, ed avvertendo essere diff. $e^{\frac{x}{c}} = \frac{1}{c} e^{\frac{x}{c}} dx$, diff. sen. $\frac{x}{c} = \frac{dx}{c}$ cos. $\frac{x}{c}$, diff. cos. $\frac{x}{c} = -\frac{dx}{c}$ sen. $\frac{x}{c}$, troveremo

$$dy = \frac{A}{c} e^{\frac{x}{c}} dx - \frac{B}{c} e^{\frac{-x}{c}} dx + \frac{C dx}{c} \cos.\frac{x}{c} - \frac{D dx}{c} \text{sen.} \frac{x}{c} \quad (2.)$$

$$ddy = \frac{A}{c^2} e^{\frac{x}{c}} dx^2 + \frac{B}{c^2} e^{\frac{-x}{c}} dx^2 - \frac{C dx^2}{c^2} \text{sen.} \frac{x}{c} - \frac{D dx^2}{c^2} \cos.\frac{x}{c} \quad (3.)$$

$$d^3y = \frac{A}{c^3} e^{\frac{x}{c}} dx^3 - \frac{B}{c^3} e^{\frac{-x}{c}} dx^3 - \frac{C dx^3}{c^3} \cos.\frac{x}{c} + \frac{D dx^3}{c^3} \text{sen.} \frac{x}{c} \quad (4.)$$

$$d^4y = \frac{A}{c^4} e^{\frac{x}{c}} dx^4 + \frac{B}{c^4} e^{\frac{-x}{c}} dx^4 + \frac{C dx^4}{c^4} \text{sen.} \frac{x}{c} + \frac{D dx^4}{c^4} \cos.\frac{x}{c} \quad (5.)$$

Se nella equazione (5.) sostituiremo y in cambio del suo valore $A e^{\frac{x}{c}} + B e^{\frac{-x}{c}} + C$ sen. $\frac{x}{c} + D$ cos. $\frac{x}{c}$ somministrato dalla equazione (1.), torneremo a trovare la formola differenziale $d^4y = \frac{y\,dx^4}{c^4}$.

Le cinque notate formole ci guidano

alla

alla determinazione delle costanti.

In primo luogo ad $x=0$ deve corrispondere $y=b$. Essendo in tal caso $e^{\frac{x}{c}}=1$, $e^{\frac{-x}{c}}=1$, sen. $\frac{x}{c}=0$, cos. $\frac{x}{c}=1$, la prima equazione si trasforma così

$b=A+B+D$ (6.).

In secondo luogo mi insegna il numero XI, che posta $x=0$, o pure $x=L$, deve uguagliarsi a nulla rispettivamente ai punti estremi a, b la somma dei momenti delle forze applicate a tutto il cilindro $aecRb$, onde si abbia $\frac{e\,ddy}{dx^2}=$

$\int\pm dx\int\pm\frac{My\,dx}{Lf}=0$, o pure sostituendo

c^4 in luogo di $\frac{eLf}{M}$, $\frac{c^4 ddy}{dx^2}=\int\pm dx\int\pm y\,dx=0$.

Fatta pertanto nella equazione (3.) $\frac{ddy}{dx^2}=0$, e ponendo prima $x=0$, indi $x=L$, troveremo

$0=A+B-D$ (7.).

$0=Ae^{\frac{L}{c}}+Be^{\frac{-L}{c}}-C$ sen. $\frac{L}{c}-D$ cos. $\frac{L}{c}$ (8.).

In terzo luogo posta $x=0$, è parimente nulla l'aja $ABMa=\int y\,dx$: ma conforme si è stabilito al numero X.

$\frac{eLf}{M}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{c^4 d^3y}{dx^3}=\int y\,dx$; dunque uguagliata a nulla nella equazione (4.) la grandezza $\frac{d^3y}{dx^3}$, e mettendo $x=0$, ci si presenterà

$0=A-B-C$ (9.).

Finalmente al numero XII. abbiamo stabilito, che ancora nella ipotesi di $x=L$

essere

esser dee $\int y\,dx = 0$.. Quindi ponendo nella equazione (4.) $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, ed $x = L$, si scoprirà

$$0 = Ae^{\frac{L}{c}} - Be^{-\frac{L}{c}} - C\cos.\frac{L}{c} + D\,\mathrm{sen}.\frac{L}{c} \quad (10.)$$

Col mezzo delle cinque notate condizioni, si assegneranno i loro valori alle quantità costanti A, B, C, D, ed alla funzione $\frac{L}{c}$, la quale servirà poi per determinare la lunghezza f del pendolo semplice isocrono al cilindro AB.

La formole (7.), e (9.) mi danno $D = A+B$, $C = A-B$, valori, che surrogati nelle formole (4.), e (10.) fanno loro prendere il seguente aspetto.

$$0 = Ae^{\frac{L}{c}} + Be^{-\frac{L}{c}} - \overline{A+B}\cdot\mathrm{sen}.\frac{L}{c} - \overline{A-B}\cdot\cos.\frac{L}{c}\,;$$

$$0 = Ae^{\frac{L}{c}} - Be^{-\frac{L}{c}} - \overline{A+B}\cdot\cos.\frac{L}{c} + \overline{A+B}\cdot\mathrm{sen}.\frac{L}{c}\,.$$

Si deduca da queste

$$\frac{A}{B} = \frac{-e^{-\frac{L}{c}} - \mathrm{sen}.\frac{L}{c} + \cos.\frac{L}{c}}{e^{\frac{L}{c}} - \mathrm{sen}.\frac{L}{c} - \cos.\frac{L}{c}} = \frac{e^{-\frac{L}{c}} - \cos.\frac{L}{c} - \mathrm{sen}.\frac{L}{c}}{e^{\frac{L}{c}} - \cos.\frac{L}{c} + \mathrm{sen}.\frac{L}{c}} \quad (11.),$$

e dall'ultima equazione

$$0 = 2 - e^{\frac{L}{c}}\cos.\frac{L}{c} - e^{-\frac{L}{c}}\cos.\frac{L}{c}\,,$$ o sia

$$e^{\frac{2L}{c}} - \frac{2e^{\frac{L}{c}}}{\cos.\frac{L}{c}} = -1\,.$$ Si supplisca il quadrato, ed estratta poscia la radice si troverà

$$e^{\frac{L}{c}} = \frac{1 \mp \mathrm{sen}.\frac{L}{c}}{\cos.\frac{L}{c}} \quad (m.)\,.$$

Il primo dei due valori, che per la formola (11.) competono alla frazione $\frac{A}{B}$, si agguaglia a $\frac{\cos.\frac{L}{c}}{1-\mathrm{sen}.\frac{L}{c}}$, il secondo a $-\frac{\cos.\frac{L}{c}}{1+\mathrm{sen}.\frac{L}{c}}$.

Giacchè, come ho testè dimostrato, $e^{\frac{d}{c}} = \frac{1-\text{sen}.\frac{d}{c}}{\cos.\frac{d}{c}}$, sarà, sostituendo una tale grandezza in luogo di $e^{\frac{d}{c}}$ nel primo valore di $\frac{A}{B}$ contenuto nella formula (11.)

$$\frac{A}{B} = \frac{-\frac{\cos.\frac{d}{c}}{1-\text{sen}.\frac{d}{c}} - \text{sen}.\frac{d}{c} + \cos.\frac{d}{c}}{\frac{1-\text{sen}.\frac{d}{c}}{\cos.\frac{d}{c}} - \text{sen}.\frac{d}{c} - \cos.\frac{d}{c}} =$$

$$\frac{\cos.\frac{d}{c}}{1-\text{sen}.\frac{d}{c}} \cdot \frac{-\text{sen}.\frac{d}{c} + \text{sen}.\frac{d}{c}^2 - \text{sen}.\frac{d}{c}\cos.\frac{d}{c}}{1-\text{sen}.\frac{d}{c} - \text{sen}.\frac{d}{c}\cos.\frac{d}{c} - \cos.\frac{d}{c}^2};$$

ma $1-\cos.\frac{d}{c}^2 = \text{sen}.\frac{d}{c}^2$; dunque effettuata questa sostituzione nel denominatore,

$$\frac{A}{B} = \frac{\cos.\frac{d}{c}}{1-\text{sen}.\frac{d}{c}} \cdot \frac{-\text{sen}.\frac{d}{c} + \text{sen}.\frac{d}{c}^2 - \text{sen}.\frac{d}{c}\cos.\frac{d}{c}}{-\text{sen}.\frac{d}{c} + \text{sen}.\frac{d}{c}^2 - \text{sen}.\frac{d}{c}\cos.\frac{d}{c}}$$

$$= \frac{\cos.\frac{d}{c}}{1-\text{sen}.\frac{d}{c}}.$$

Con pari metodo proverò essere

$$\frac{A}{B} = \frac{e^{-\frac{d}{c}} - \cos.\frac{d}{c} - \text{sen}.\frac{d}{c}}{e^{\frac{d}{c}} - \cos.\frac{d}{c} + \text{sen}.\frac{d}{c}} = \frac{-\cos.\frac{d}{c}}{-1+\text{sen}.\frac{d}{c}},$$

e perciò avremo

$\frac{A}{B} = \frac{\pm\cos.\frac{d}{c}}{1\mp\text{sen}\frac{d}{c}}$. Da questa formula io ricavo

$$B = A.\frac{1\mp\text{sen}.\frac{d}{c}}{\pm\cos.\frac{d}{c}} = A.\frac{\pm 1-\text{sen}.\frac{d}{c}}{\cos.\frac{d}{c}}.$$

Essendo per la formula (9) $C=A-B$, scopriremo

$$C = A.\frac{\cos.\frac{d}{c} + \text{Sen}\frac{d}{c} \mp 1}{\cos.\frac{d}{c}}.$$

d)

L'equazione (2.) determina $D = A + B$, e quindi troverassi

$$D = A \cdot \frac{\left(\cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \pm 1\right)}{\cos.\frac{\alpha}{c}}.$$

Dandoci inoltre la formola (8.) $b = A + B + D$, e la (2.) $D = A + B$, ne risulta

$$D = \frac{b}{2} = A \cdot \frac{\left(\cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \pm 1\right)}{\cos.\frac{\alpha}{c}}.$$

I due valori di D mi somministrano quello di

$$A = \frac{b \cos.\frac{\alpha}{c}}{2 \cdot \left(\cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \pm 1\right)}.$$

Or ecco i valori delle quattro costanti, i quali si renderanno noti, ridotta che si abbia a computo la funzione $\frac{\alpha}{c}$ col mezzo della equazione (12.)

$$A = \frac{b \cos.\frac{\alpha}{c}}{2 \cdot \left(\cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \pm 1\right)} = b \cdot \frac{\left(\pm 1 + \text{sen}.\frac{\alpha}{c} - \cos.\frac{\alpha}{c}\right)}{4\, \text{sen}.\frac{\alpha}{c}} \quad (13.)$$

$$B = \frac{b \cdot \left(\mp 1 - \text{sen}.\frac{\alpha}{c}\right)}{2 \cdot \left(\cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \pm 1\right)} = b \cdot \frac{\left(\mp 1 + \text{sen}.\frac{\alpha}{c} + \cos.\frac{\alpha}{c}\right)}{4\, \text{sen}.\frac{\alpha}{c}}, \quad (14.)$$

$$C = \frac{b \cdot \left(\mp 1 + \text{sen}.\frac{\alpha}{c} + \cos.\frac{\alpha}{c}\right)}{2 \cdot \left(\cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \pm 1\right)} = \frac{b \cdot \left(\pm 1 - \cos.\frac{\alpha}{c}\right)}{2\, \text{sen}.\frac{\alpha}{c}} \quad (15.)$$

$$D = \frac{b}{2} = \frac{b\, \text{sen}.\frac{\alpha}{c}}{2\, \text{sen}.\frac{\alpha}{c}} \quad (16.).$$

Le seconde espressioni delle costanti A, B; C si provano eguali alle prime con un breve giro di computo, che io lascio alla industria di chi legge.

Sostituiti questi valori nella equazione (1.), troveremo

$$\frac{y}{b} = \frac{e^{\frac{x}{c}} \cos.\frac{\alpha}{c} + e^{-\frac{x}{c}} \cdot \overline{\pm 1 - \text{sen}.\frac{\alpha}{c}}}{2 \cdot \cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \pm 1}$$

$$\frac{\overline{\pm 1 - \cos.\frac{\alpha}{c}} \cdot \text{sen}.\frac{x}{c} + \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \cos.\frac{x}{c}}{2\ \text{sen}.\frac{\alpha}{c}} \quad (13.)$$

<u>Ridurre a forma più semplice</u>
<u>la formola (13.)</u>

XIV. Prendano le assisse l'origine dal punto medio C (Fig. 19 a 20.), e chiamata $CP = z$, sarà $\frac{1}{2}\alpha - z = x$. Avremo pertanto $e^{\frac{x}{c}} = e^{\frac{\alpha}{2c}} e^{-\frac{z}{c}}$, e giacchè per l'equazione (12.) $e^{\frac{\alpha}{2c}} = \sqrt{\frac{1 \mp \text{sen}.\frac{\alpha}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{c}}}$, scopriremo

$$e^{\frac{x}{c}} = e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\frac{1 \mp \text{sen}.\frac{\alpha}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{c}}}\,, \quad e^{-\frac{x}{c}} = e^{\frac{z}{c}} \sqrt{\frac{\cos.\frac{\alpha}{c}}{1 \mp \text{sen}.\frac{\alpha}{c}}}.$$

Quindi sarà $\frac{Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}}}{b} = \frac{e^{\frac{x}{c}} \cos.\frac{\alpha}{c} + e^{-\frac{x}{c}} \cdot \overline{\pm 1 - \text{sen}.\frac{\alpha}{c}}}{2 \cdot \cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \pm 1} =$

$$\frac{\overline{\pm e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}} \sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c} \cdot \overline{1 \mp \text{sen}.\frac{\alpha}{c}}}}{2 \cdot \cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \pm 1} = \frac{\pm e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}}{2 \cdot \overline{\pm e^{\frac{\alpha}{2c}} + e^{-\frac{\alpha}{2c}}}}.$$

Quest'ultimo valore dipende da ciò, che per la formola (12.) $\pm e^{\frac{\alpha}{2c}} + e^{-\frac{\alpha}{2c}} =$

$$\pm\sqrt{\frac{1 \mp \text{sen}.\frac{\alpha}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{c}}} + \sqrt{\frac{\cos.\frac{\alpha}{c}}{1 \mp \text{sen}.\frac{\alpha}{c}}} = \frac{\cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \pm 1}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c} \cdot \overline{1 \mp \text{sen}.\frac{\alpha}{c}}}}.$$

La Trigonometria c'istruisce essere $\overline{\pm 1 - \cos.\frac{\alpha}{c}} \cdot \text{sen}.\frac{x}{c} + \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \cos.\frac{x}{c} =$ $\pm\ \text{sen}.\frac{x}{c} + \text{sen}.\frac{\alpha - x}{c}$, e sostituendo nell'omogeneo di comparazione in cambio di x il suo valore $\frac{1}{2}\alpha - z$, $\overline{\pm 1 - \cos.\frac{\alpha}{c}} \cdot \text{sen}.\frac{x}{c}$ $+ \text{sen}.\frac{\alpha}{c} \cos.\frac{x}{c} = \pm\ \text{sen}\,\overline{\frac{\alpha}{2c} - \frac{z}{c}} + \text{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} + \frac{z}{c}}$.

Nella

Nella formola (17.) alle grandezze espresse per x si sostituiscano le uguali espresse per z or ora determinate; e si avrà

$$\frac{2y}{b} = \frac{\pm e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}}{\pm e^{\frac{\alpha}{2c}} + e^{-\frac{\alpha}{2c}}} \pm \frac{\operatorname{sen}\overline{\frac{\alpha}{2c} - \frac{z}{c}} + \operatorname{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} + \frac{z}{c}}}{\operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c}} \quad (16.).$$

Abbiamo inoltre $e^{\frac{\alpha}{2c}} + e^{-\frac{\alpha}{2c}} =$

$$\frac{\cos.\frac{\alpha}{c} - \operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c} + 1}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}\cdot\overline{1 - \operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c}}}} = \mp\frac{2\cos.\frac{\alpha}{2c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}} \quad (a.),$$

$$-e^{\frac{\alpha}{2c}} + e^{-\frac{\alpha}{2c}} = \frac{\cos.\frac{\alpha}{c} - \operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c} - 1}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}\cdot\overline{1 + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{c}}}} = \pm\frac{2\operatorname{sen}.\frac{\alpha}{2c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}} \quad (b.),$$

$$\frac{\operatorname{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} - \frac{z}{c}} + \operatorname{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} + \frac{z}{c}}}{\operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c}} = \frac{\cos.\frac{z}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{2c}} \quad (c.),$$

$$\frac{-\operatorname{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} - \frac{z}{c}} + \operatorname{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} + \frac{z}{c}}}{\operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c}} = \frac{\operatorname{sen}.\frac{z}{c}}{\operatorname{sen}.\frac{\alpha}{2c}} \quad (d.)$$

Nella

(a.) La accennata riduzione si può dimostrare così. Il secondo membro dell'equazione, lasciato da parte il divisore $\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}$ si agguaglia, alzandolo al quadrato alla quantità

$$\frac{\overline{\cos.\frac{\alpha}{c}}^2 - 2\operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c}\cos.\frac{\alpha}{c} + \overline{\operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c}}^2 + 2\cos.\frac{\alpha}{c} - 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{c} + 1}{1 - \operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c}}$$

$$= \frac{2 - 2\operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c} + 2\cos.\frac{\alpha}{c} - 2\operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c}\cos.\frac{\alpha}{c}}{1 - \operatorname{sen}.\frac{\alpha}{c}} = 2 + 2\cos.\frac{\alpha}{c}.$$

Il noto teorema trigonometrico ci suggerisce l'equazione $\cos.\frac{\alpha}{c} = \overline{\cos.\frac{\alpha}{2c}}^2 - \overline{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2c}}^2$; ma $\overline{\operatorname{sen}.\frac{\alpha}{2c}}^2 = 1 - \overline{\cos.\frac{\alpha}{2c}}^2$; dunque $1 + \cos.\frac{\alpha}{c} = 2\cdot\overline{\cos.\frac{\alpha}{2c}}^2$, o sia $2 + 2\cos.\frac{\alpha}{c} = 4\cdot\overline{\cos.\frac{\alpha}{2c}}^2$.

Il

Nella formola (a) i segni del meno, e del più anteposti a $2\cos.\frac{\alpha}{2c}$ sono adattati alle due circostanze, quella che $\cos.\frac{\alpha}{2c}$ sia quantità negativa.

Il perchè sostituito in cambio di $2+2\cos.\frac{\alpha}{c}$ lo scoperto valore, estratta la radice, e restituito il divisore $\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}$, troveremo $e^{\frac{\alpha}{2c}} + e^{-\frac{\alpha}{2c}}$

$$= \frac{\cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} + 1}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}\cdot\overline{1-\text{sen}.\frac{\alpha}{c}}}} = \mp\frac{2\cos.\frac{\alpha}{2c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}.$$

(b.) Questa riduzione si prova con un metodo simile al precedente. Imperocchè il quadrato del secondo membro senza il divisore $\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}$ è =

$$\frac{\cos.\frac{\alpha}{c}^2 - 2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{c}\cos.\frac{\alpha}{c} + \text{sen}.\frac{\alpha}{c}^2 - 2\cos.\frac{\alpha}{c} + 2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{c} + 1}{1+\text{sen}.\frac{\alpha}{c}}$$

$$= \frac{2 + 2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{c} - 2\cos.\frac{\alpha}{c} - 2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{c}\cos.\frac{\alpha}{c}}{1+\text{sen}.\frac{\alpha}{c}} = 2 - 2\cos.\frac{\alpha}{c}.$$

Ora $2 - 2\cos.\frac{\alpha}{c} = 4\cdot\text{sen}.\frac{\alpha}{2c}^2$; dunque cavando la radice, e restituito il divisore $\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}$,

$$-e^{\frac{\alpha}{2c}} + e^{-\frac{\alpha}{2c}} = \frac{\cos.\frac{\alpha}{c} - \text{sen}.\frac{\alpha}{c} - 1}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}\cdot\overline{1+\text{sen}.\frac{\alpha}{c}}}} = \pm\frac{2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{2c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}$$

(c) (d) È noto essere $\pm\,\text{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} - \frac{z}{c}} = \pm\,\text{sen}.\frac{\alpha}{2c}\cos.\frac{z}{c} \mp \cos.\frac{\alpha}{2c}\,\text{sen}.\frac{z}{c}$, $\text{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} + \frac{z}{c}} = \text{sen}.\frac{\alpha}{2c}\cos.\frac{z}{c} + \cos.\frac{\alpha}{2c}\,\text{sen}.\frac{z}{c}$, e perciò $\text{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} - \frac{z}{c}} + \text{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} + \frac{z}{c}} = 2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{2c}\cos.\frac{z}{c}$, $-\,\text{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} - \frac{z}{c}} + \text{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} + \frac{z}{c}} = 2\cos.\frac{\alpha}{2c}\,\text{sen}.\frac{z}{c}$: ma come parimente si sa, $\text{sen}.\frac{\alpha}{c} = 2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{2c}\cos.\frac{\alpha}{2c}$; dunque

$$\frac{\text{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} - \frac{z}{c}} + \text{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} + \frac{z}{c}}}{\text{sen}.\frac{\alpha}{c}} = \frac{\cos.\frac{z}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{2c}},\quad \frac{-\,\text{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} - \frac{z}{c}} + \text{sen}.\overline{\frac{\alpha}{2c} + \frac{z}{c}}}{\text{sen}.\frac{\alpha}{c}}$$

$$= \frac{\text{sen}.\frac{z}{c}}{\text{sen}.\frac{\alpha}{2c}}.$$

negativo; questo che $\cos.\frac{\alpha}{2c}$ sia quantità positiva. I segni più o meno nella formola (6), che precedono $2\,\text{sen.}\frac{\alpha}{2c}$, servono ai due casi, che $\text{sen.}\frac{\alpha}{2c}$ sia negativo, o positivo.

La surrogazione dei nuovi valori ci somministra le due seguenti equazioni, che nella più semplice forma esprimono le curve dei due diversi generi analoghe a quelle, che sono nella figura 19, e 20 delineate

$$\frac{2y}{b} = \frac{\mp e^{\frac{z}{c}} \mp e^{\frac{-z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}{2\cos.\frac{\alpha}{2c}} + \frac{\cos.\frac{z}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{2c}} \quad (19.)$$

$$\frac{2y}{b} = \frac{\mp e^{\frac{z}{c}} \mp e^{\frac{-z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}{2\,\text{sen.}\frac{\alpha}{2c}} + \frac{\text{sen.}\frac{z}{c}}{\text{sen.}\frac{\alpha}{2c}} \quad (20.)$$

Secondo ciò, che poco fa ho notato, i segni superiori nell'equazioni (19.), e (20.) suppongono $\cos.\frac{\alpha}{2c}$, $\text{sen.}\frac{\alpha}{2c}$ grandezze negative, gli inferiori le suppongono positive.

XV. Le cose, che sono per dire, richiedono, che rispettivamente alla formola (19.) si dimostri essere $-e^{\frac{\alpha}{2c}}+e^{\frac{-\alpha}{2c}} = \frac{-1+\text{sen.}\frac{\alpha}{c}+\cos.\frac{\alpha}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}\cdot 1-\text{sen.}\frac{\alpha}{c}}} = \frac{\mp 2\,\text{sen.}\frac{\alpha}{2c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}$: e primieramente la formola (12.) ci dà per riguardo alla equazione (19.) $-e^{\frac{\alpha}{2c}}+e^{\frac{-\alpha}{2c}} = -\sqrt{\frac{1-\text{sen.}\frac{\alpha}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{c}}} + \sqrt{\frac{\cos.\frac{\alpha}{c}}{1-\text{sen.}\frac{\alpha}{c}}} = \frac{-1+\text{sen.}\frac{\alpha}{c}+\cos.\frac{\alpha}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}\cdot 1-\text{sen.}\frac{\alpha}{c}}}$. Provo in secondo

luogo

luogo, che si avrà l'equazione

$$\frac{-1+\text{sen}.\frac{\alpha}{c}+\text{cos}.\frac{\alpha}{c}}{\sqrt{1-\text{sen}.\frac{\alpha}{c}}} = \mp 2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{2c}.$$

Abbiamo dalla Trigonometria $2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{c} = 4\,\text{sen}.\frac{\alpha}{2c}\,\text{cos}.\frac{\alpha}{2c}$, e moltiplicando, e dividendo per $1-\text{sen}.\frac{\alpha}{c}$,

$$\frac{2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{c} - 2.\overline{\text{sen}.\frac{\alpha}{c}}^2}{1-\text{sen}.\frac{\alpha}{c}} = 4\,\text{sen}.\frac{\alpha}{2c}\,\text{cos}.\frac{\alpha}{2c}.$$

Pongo in cambio di uno de' due quadrati $-\overline{\text{sen}.\frac{\alpha}{c}}^2$ il suo valore $-1+\overline{\text{cos}.\frac{\alpha}{c}}^2$, e mi si presenta

$$\frac{-1+2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{c} - \overline{\text{sen}.\frac{\alpha}{c}}^2 + \overline{\text{cos}.\frac{\alpha}{c}}^2}{1-\text{sen}.\frac{\alpha}{c}} = 4\,\text{sen}.\frac{\alpha}{2c}\,\text{cos}.\frac{\alpha}{2c}.$$

Dall'annotazione (a) ricavasi $\mp 2\,\text{cos}.\frac{\alpha}{2c} = \frac{1-\text{sen}.\frac{\alpha}{c}+\text{cos}.\frac{\alpha}{c}}{\sqrt{1-\text{sen}.\frac{\alpha}{c}}}$. Sostituiscasi questo valore, e dividendo poscia per lo stesso, ritroverassi

$$\frac{-1+\text{sen}.\frac{\alpha}{c}+\text{cos}.\frac{\alpha}{c}}{\sqrt{1-\text{sen}.\frac{\alpha}{c}}} = \mp 2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{2c},$$

e perciò

$$-e^{\frac{\alpha}{2c}} + e^{-\frac{\alpha}{2c}} = \frac{-1+\text{sen}.\frac{\alpha}{c}+\text{cos}.\frac{\alpha}{c}}{\sqrt{\text{cos}.\frac{\alpha}{c}\,.\,\overline{1-\text{sen}.\frac{\alpha}{c}}}} = \frac{\mp 2\,\text{sen}.\frac{\alpha}{2c}}{\sqrt{\text{cos}.\frac{\alpha}{c}}}.$$

Corollarj, che si deducono dalla formola (19.)

XVI. Dalla formola (19.) si deducono i seguenti corollarj.

1. Ponendo nella detta formola l'assissa $z=0$, ne risulterà il valore dell'applicata $y = Ce$ in tutte le curve analoghe alla figura (19.), dalle quali viene l'asse AB tagliato in un numero pari di punti. Avremo pertanto $\frac{Ce}{Aa} = \frac{y}{b} = \frac{\mp\sqrt{\text{cos}.\frac{\alpha}{c}}+1}{2\,\text{cos}.\frac{\alpha}{2c}} =$

$= \frac{1}{2}\,\text{sec.}\frac{\alpha}{2c} \mp \text{sec.}\frac{\alpha}{2c}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}$ (a.) Dal ridur-re a computo rispettivamente a ciascuna curva del genere di quella della figura (19.) la frazione $\frac{\alpha}{c}$ dipende la determinazione del valore della linea Cc. Mi riservo di insegna-re il metodo di un tal calcolo al numero XIX. e seguenti.

2. Si prendano le differenze nella formola (19.), e scoprirassi

$$\frac{2c\,dy}{b\,dz}\cdot\cos.\frac{\alpha}{2c} = \frac{\mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}{2} - \text{sen.}\frac{z}{c}\ (21.)$$

Facciasi $\frac{dy}{dz} = 0$; e le radici della equazione

$$\mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}} - 2\,\text{sen.}\frac{z}{c} = 0$$

determineran-no i valori della assissa z, alle quali cor-rispondono le massime ordinate y nelle curve analoghe a quella nella figura (19.) delineata. Secondochè queste curve ta-gliano l'asse AB in 2, 4, 6, 8 punti &c., i numeri delle predette radici sa-ranno 1, 3, 5, 7 &c. Una delle radici della nostra equazione si è $z = 0$, e perciò nella curva, di cui parliamo, ascende al massimo l'ordinata Cc corrispondente al punto medio C del cilindro AB.

3. Fatta $y = 0$, si troveranno i punti 2, 4, 6, 8 &c., nei quali l'asse AB vien tagliato dalle curve compresa nella equa-zione (19.). Avremo pertanto

$\mp e^{\frac{z}{c}}$

(a) Stando come il seno tutto al coseno così la secante al seno tutto, si verifica l'equazione $\text{sec.}\frac{\alpha}{2c} = \frac{1}{\cos.\frac{\alpha}{2c}}$, o sia $\frac{1}{2}\text{sec.}\frac{\alpha}{2c} = \frac{1}{2\cos.\frac{\alpha}{2c}}$

$$\mp e^{\frac{z}{c}} \mp e^{\frac{-z}{c}} + \frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}} = 0$$. Mentre il cilindro oscilla, questi punti restano immobili; e quindi sottoponendo ai punti per esempio a, ? (fig. 19.) due appoggi, non sono da essi frastornate le vibrazioni del cilindro. La mentovata figura esprime il modo principale, onde si vibra il cilindro, rendendo il suono fra tutti il più grave. I punti stabili a, ? distano dalle estremità A, B del cilindro per le linee aA, ?B, che come vedremo al numero XXX. poco calano dalla quarta parte della lunghezza AB. Negli stromenti formati di cilindri i punti a, ? riposano su due scannelli, essendo riuscito alla pratica col mezzo di replicati tentativi di accorgersi di una proprietà, senza della quale non potrebbe la Musica valersi dei nostri corpi sonori.

4. Differenzio nuovamente la formola (21.), e scopro

$$\frac{4c^2 ddy}{6dz^2}\cdot\cos.\frac{\alpha}{2c} = \mp e^{\frac{z}{c}} \mp e^{\frac{-z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}} - 2\cos.\frac{z}{c} \quad (22.)$$

Abbiamo veduto al numero XI., che quando $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dz^2} = 0$, è parimente nulla in quel tal sito la curvatura del cilindro, il momento della sua elasticità, ed altresì la somma dei momenti delle forze applicate al cilindro stesso o da un canto, o dall'altro. Si è pure fatta la riflessione, che ciò interviene nei punti estremi a, b, del cilindro. Pongo nella equazione (22.) $\frac{ddy}{dz^2} = 0$, e mi si affaccia $\mp e^{\frac{z}{c}} \mp e^{\frac{-z}{c}} - \frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}} = 0$. Rispettivamente

Rispettivamente ai punti estremi a, b è $z = \pm \frac{\alpha}{2}$, e queste debbono essere due radici della nostra equazione. In fatti sostituendo in cambio di z i detti valori, e fatta la riflessione essere $\cos. \frac{-\alpha}{2c} = \cos. \frac{\alpha}{2c}$, troveremo in tutti e due i casi $\mp e^{\frac{\alpha}{2c}} \mp e^{\frac{-\alpha}{2c}} - \frac{2\cos.\frac{\alpha}{2c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}} = 0$,

ovvero $e^{\frac{\alpha}{2c}} + e^{\frac{-\alpha}{2c}} = \mp \frac{2\cos.\frac{\alpha}{2c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}$, equazione,

che ho dimostrato esser vera al numero XIV. nell'annotazione (a.).

Il numero delle radici della equazione, di cui trattiamo, si eguaglia a quello de' punti 2, 4, 6, &c. ne' quali la curva taglia l'asse AB. Detratte le due radici $z = \pm \frac{\alpha}{2}$; le rimanenti 0, 2, 4, 6, &c. servono a determinare nella curva altrettanti flessi contrarj, ed in tali siti parimente si eguaglia a nulla la curvatura del cilindro; e la somma dei momenti delle forze applicate a destra, o a sinistra.

Le due metà per esempio cCa, cCb (fig. 19.) della nostra curva sono uguali, simili, e collocate in maniera, che segnate due assisse uguali CP, CQ, una positiva, e l'altra negativa, si eguagliano le corrispondenti ordinate PM, QN, e sono amendue o positive, o negative. In prova di ciò faccia chi legge la riflessione, che essendo $\cos. \frac{z}{c} = \cos. \frac{-z}{c}$, nulla si altera la formola (19.), mentre si cangia il segno alla incognita z; e quindi ad assisse

uguali

uguali una positiva, e l'altra negativa si riferiscono ordinate eguali, e similmente situate.

Se dee pareggiare il nulla la somma dei momenti rispettivamente al punto estremo b delle forze applicate al cilindro a Q c 7 b, egli è necessario, che le forze, ovvero le ordinate della nostra curva ad esse proporzionali siano parte positive, e parte negative: e perchè passando fra i due rami c Q a, c 7 b la somiglianza testè descritta, si richiede indispensabilmente, che ciascuno tagli l'asse AB almeno in un punto; come nella figura (19.ª) succede.

La somma dei momenti in riguardo al punto M delle forze applicate alla porzione di cilindro a M è proporzionale a $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dz^2}$, o sia alla quantità
$$\mp e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}} = n\cos\frac{z}{c}.$$
Taglio CQ = CP, e scopro l'aggregato dei momenti rispettivamente al punto N delle forze applicate alla parte a Q c N del cilindro come
$$\mp e^{-\frac{z}{c}} \mp e^{\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}} - n\cos\frac{-z}{c}.$$
L'eguaglianza della ritrovate grandezze mostra, che sono eguali le somme dei nominati momenti: ma l'aggregato dei momenti rispettivamente al punto N delle forze applicate al cilindro a Q c N pareggia quello in relazione al punto M delle forze applicate al cilindro b 7 c M; dunque si eguagliano le somme dei momenti a destra, e a sinistra del punto M preso ad arbitrio, i quali perciò

fanno

fanno equilibrio, e colla elasticità del cilindro nel sito M questa forza; dimodochè non può seguire verun moto di rotazione.

5. Levata la differenza nella formola (22.), avremo

$$\frac{\pm c^3 d^3 y \cos\frac{\alpha}{2c}}{6\, dz^3} = \pm e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}} \mp 2\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{c} \quad (23.).$$

Dal numero X. raccogliesi essere $\frac{e\alpha f}{M}\cdot\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{c^4 d^3 y}{dx^3} = \int y\, dx$. Nel numero XII. ho notato, che la somma delle forze applicate al cilindro aM è proporzionale all'aja $aMPA = \int y\,dx = \int -y\,dz$. Si inferisca, che questa somma serba la ragione di $\frac{c^4 d^3 y}{dx^3} = \frac{c^4 d^3 y}{-dz^3}$, o sia per l'equazione (23.) della quantità $\pm e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}} - 2\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{c}$. Qualora si abbia $\pm e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}} - 2\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{c} = 0$, si eguaglierà a nulla l'aggregato delle forze applicate al cilindro aM. L'ultima formola ha sempre le tre radici $z = 0$, $z = \frac{\alpha}{2}$, $z = -\frac{\alpha}{2}$. Posta $z = 0$, chiaramente si scopre essere $\pm e^{\frac{0}{c}} \mp e^{-\frac{0}{c}} = \pm 1 \mp 1 = 0$, $2\,\mathrm{sen}\,\frac{0}{c} = 0$. Questa radice mi addita eguagliarsi a nulla l'aggregato delle forze applicate alla metà del cilindro aCc, e che per conseguenza l'aja positiva aCA pareggia la negativa CCc. L'altre due radici $z = \frac{\alpha}{2}$, $z = -\frac{\alpha}{2}$ mi danno, quella

$$\pm e^{\frac{\alpha}{2c}} \mp e^{-\frac{\alpha}{2c}} \sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}} - 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2c} = 0,$$ questa

$$\pm e^{-\frac{\alpha}{2c}} \mp e^{\frac{\alpha}{2c}} \sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}} - 2\,\mathrm{sen}\,-\frac{\alpha}{2c} = 0;$$ e

giacchè $-2\,\mathrm{sen}\,-\frac{\alpha}{2c} = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2c}$, trovo in

tutti

tutti e due i casi $-e^{\frac{\alpha}{nc}} + e^{\frac{-\alpha}{nc}} = \frac{\pm n\ \mathrm{sen.}\frac{\alpha}{nc}}{\pm\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}$,

equazione, che al numero XV. ho dimostrato verificarsi. Dalla radice $z = \frac{\alpha}{n} = CA$ si ricava, che una somma di forze uguali a nulla si applica alla porzione aM del cilindro, quando essa pareggia il nulla e annullata; ed quello è quel, che più importa, la radice $z = -\frac{\alpha}{n} = CB$ ci manifesta esser nullo lo aggregato delle forze applicate a tutto il cilindro AB, cioè a dire che le forze negative si agguagliano alle positive. In sì fatta guisa non potendo il cilindro girarsi intorno a qualsivoglia punto M, ed essendo egualmente tirato per le direzioni opposte Cc, cC, viene trattenuto immobile nella sua positura e dalle forze MH uguali, e contrarie a quelle, che tentano di farlo reciprocare, e rimosse esse forze MH, non concepisce altro moto, che di sola vibrazione.

XVII. Incontravamo nel corollario, sì dedotto dalla formola (20.) l'equazione $e^{\frac{\alpha}{nc}} + e^{\frac{-\alpha}{nc}} = \frac{\mp n\cos.\frac{\alpha}{nc}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}$, la di cui verità presentemente dimostro. L'equazione (19.) ci somministra rispettivamente alla formola

(20.) $e^{\frac{\alpha}{nc}} + e^{\frac{-\alpha}{nc}} = \sqrt{\frac{1+\mathrm{sen.}\frac{\alpha}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{c}}} + \sqrt{\frac{\cos.\frac{\alpha}{c}}{1+\mathrm{sen.}\frac{\alpha}{c}}} = \frac{1+\mathrm{sen.}\frac{\alpha}{c}+\cos.\frac{\alpha}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}\cdot 1+\mathrm{sen.}\frac{\alpha}{c}}}$. Egli è di uopo adunque provare adempiersi la equazione $\frac{1+\mathrm{sen}\frac{\alpha}{c}+\cos.\frac{\alpha}{c}}{\sqrt{1+\mathrm{sen.}\frac{\alpha}{c}}} = \mp n\cos.\frac{\alpha}{nc}$.

Moltiplico, e divido per $1+\mathrm{sen}\frac{\alpha}{c}$

il.

il primo membro dell'equazione $-2\,\text{sen.}\frac{d}{c}$
$= -4\cos.^2\frac{d}{2c}\,\text{sen.}\frac{d}{2c}$, onde si abbia

$$\frac{-2\,\text{sen.}\frac{d}{c} - 2\,\text{sen.}^2\frac{d}{c}}{1+\text{sen.}\frac{d}{c}} = -4\cos.\frac{d}{2c}\,\text{sen.}\frac{d}{2c}$$

In luogo di uno de' due quadrati $-\text{sen.}^2\frac{d}{c}$ colloco il suo valore $-1+\cos.^2\frac{d}{c}$, e trovo

$$\frac{-1-2\,\text{sen.}\frac{d}{c}-\text{sen.}\frac{d}{c}+\cos.^2\frac{d}{c}}{1+\text{sen.}\frac{d}{c}} = -4\cos.\frac{d}{2c}\,\text{sen.}\frac{d}{2c}:$$

ma per l'annotazione (6.) $\pm 2\,\text{sen.}\frac{d}{2c} = \dfrac{-1-\text{sen.}\frac{d}{c}+\cos.\frac{d}{c}}{\sqrt{1+\text{sen.}\frac{d}{c}}}$; dunque surrogando un tal valore, e dividendo poscia per lo stesso, scopriremo $\dfrac{1+\text{sen.}\frac{d}{c}+\cos.\frac{d}{c}}{\sqrt{1+\text{sen.}\frac{d}{c}}} = \mp 2\cos.\frac{d}{2c}$, e conseguentemente sarà

$$e^{\frac{d}{2c}} + e^{-\frac{d}{2c}} = \frac{1+\text{sen.}\frac{d}{c}+\cos.\frac{d}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}\cdot\overline{1+\text{sen.}\frac{d}{c}}}} = \frac{\mp 2\cos.\frac{d}{2c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}$$

Corollarj, che si deducono dalla formola (29.)

XVIII. Dalla formola (29.) ne nascono i corollarj seguenti.

1. La mentovata formola comprende tutte le curve analoghe alla figura (20.), che tagliano l'asse AB nel punto medio C. In fatti posta $z = CP = 0$, si trova $y = 0$. Le nostre curve hanno la comune proprietà, che a due assisse uguali CP, CQ una positiva, e l'altra negativa corrispondono due ordinate uguali una positiva, e l'altra negativa, o al rovescio PM, QN.

Se nella equazione (20.)

$$\frac{2y}{b} = \frac{\mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}{2\,\text{sen.}\frac{d}{2c}} + \frac{\text{sen.}\frac{z}{c}}{\text{sen.}\frac{d}{2c}}$$

cangeremo

cangeremo il segno alla incognita z, scopriremo $\frac{2y}{b} = \frac{\mp e^{-\frac{z}{c}} \pm e^{\frac{z}{c}} \sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}{2\,\text{sen.}\frac{d}{2c}} + \frac{\text{sen.}-\frac{z}{c}}{\text{sen.}\frac{d}{2c}}$.

Il paragone delle due espressioni dimostra, che essendo $\text{sen.}-\frac{z}{c} = -\text{sen.}\frac{z}{c}$, a pari assisse CP, CQ quella positiva, e questa negativa si riferiscono ordinate uguali PM, QN, ma affette da segni contrarj. Quindi le due metà di curva CgEa, CkZb sono uguali, e simili, ma inversamente collocate e in riguardo alle assisse, e in riguardo alle ordinate. Lo stesso dicasi delle due porzioni di curva aEgCkN, bZkCgM. Si osservi, che a punti analoghi per esempio g, k di queste porzioni si vanno applicate forze uguali e contrarie, e che per conseguenza la somma dei momenti rispettivamente ai punti N, M delle forze applicate ad esse porzioni sono fra loro uguali, ma una positiva, e l'altra negativa.

2. Col mettere $y = 0$, si determinano i punti 3, 5, 7, 9 &c., nei quali le curve contenute nella equazione (20.) tagliano l'asse AB. Una tale ipotesi mi somministra la formula $\mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\cos.\frac{d}{c}} + 2\,\text{sen.}\frac{z}{c} = 0$, ~~Mancava adunque~~ che va sempre fornita dalla radice $z = 0$. Mentre adunque il cilindro riposa equilibrato sopra un sostegno sottoposto al punto medio C, può ripiegarsi in tutte le curve espresse dalla equazione (20.), e rendere i suoni ad esse curve confacenti, fra' quali il più grave si è quello, che produce il cilindro, quando si conforma alla curva della figura (20.). Se gli appoggi cadono

sotto

sotto gli altri punti immobili a, b, si sente lo stesso suono. Chi quel udire un suono chiaro e forte, avverta di non battere il cilindro ne' punti stabili a, c, b. I siti più vicini dai punti fissi sono i più opportuni per batterlo, e specialmente i due G, K, ai quali corrispondono le massime ordinate Gg, Kk. Non riesce molto utile il percuotere il cilindro in vicinanza dei punti estremi A, B; perchè parte della forza si impiega a far girare il cilindro intorno il più vicino sostegno.

3. Differenzio la formula (20.) onde si abbia $\frac{4c\,dy}{-b\,dz}\cdot \text{sen.}\frac{\alpha}{2c} =$

$$\pm e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c} - 2\cos.\frac{z}{c}} \quad (24.)$$

Le radici della equazione $\pm e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}} - 2\cos.\frac{z}{c} = 0$ determinano i punti, per esempio G, K, ai quali corrispondono le massime ordinate Gg, Kk. I numeri di tali ordinate saranno 2, 4, 6, 8 &c., secondochè le curve taglieranno l'asse AB in punti 3, 5, 7, 9 &c.

4. Prendo di bel nuovo la differenza nella equazione (24.), e trovo

$$\frac{4c^2\,ddy}{b\,dz^2}\cdot \text{sen.}\frac{\alpha}{2c} = \mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}} - 2\,\text{sen.}\frac{z}{c} \quad (25.)$$

essendo la somma dei momenti in relazione al punto M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro proporzionale a $\frac{ddy}{dz^2}$, serberà altresì la ragione della grandezza $\mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}} - 2\,\text{sen.}\frac{z}{c}$. In quei siti, dove la predetta somma si

agguaglia

eguaglia a nulla, egli è di uopo, che si adempia l'equazione $\mp a^{\frac{z}{c}} \pm a^{\frac{-z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c} - n\,\text{sen}.\frac{z}{c}} = 0$. Ha sempre questa le sue radici $z = \pm\frac{\alpha}{n}$, $z = 0$. Posta $z = \pm\frac{\alpha}{n}$, si trova

$$-a^{\frac{\alpha}{nc}} + a^{\frac{-\alpha}{nc}} = \frac{\pm n\,\text{sen}.\frac{\alpha}{nc}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}$$

conforme a ciò che ho dimostrato nell'annotazione (6.). La prima radice determina il punto A, e mi insegna, che quando la parte aM del cilindro pareggia il nulla, ed il punto M coincide col punto a, è parimente nulla la somma dei momenti rispettivamente al punto M, ovvero a delle forze ad essa parte applicate. Dalla seconda radice, che ci dà il punto B, si raccoglie uguagliarsi a nulla l'aggregato dei momenti in riguardo al punto b delle forze applicate a tutto il cilindro agCkb. La terza radice segna il punto C, e fa palese, che al nulla equivale la somma dei momenti per rapporto al punto C delle forze applicate alla metà del cilindro agC. Noto, che nel sito C interviene un flesso contrario, e che il numero di tali flessi si uguaglia a quello dei punti, nei quali la curva tagliano l'asse AB, detratto il binario.

Essendo le forze applicate a punti analoghi delle due metà di cilindro agC, bfkC sempre uguali e contrarie, egli è manifesto, che pure sono tali le somme dei momenti delle forze applicate ad esse metà rispettivamente al punto medio C. Le dette somme frattanto debbono essere amendue o positive, o negative; perchè hanno da stare in equilibrio e tra loro, e colla forza

elastica

elastica del cilindro nel sito C. Le due condizioni, che sembrano assolutamente ripugnanti, si conciliano insieme, quando le nominate somme si agguagliano a nulla, come effettivamente succede.

E qui cade in acconcio la riflessione, essere necessario, che le nostre curve taglino l'asse almeno in un punto. Perchè se le forze applicate alla metà del cilindro a e g C hanno da formare equilibrio rispettivamente al punto C, fa di mestieri, che siano parte positive, e parte negative, e questa circostanza indispensabilmente richiede, che la curva a e g C sia parte al di sotto, e parte al di sopra dell'asse AB, e che per conseguenza lo intersechi almeno in un punto e. Lo stesso dicasi della curva b d k C, la quale deve tagliare l'asse AB almeno in un punto d. Si aggiunga il punto C, e si troveranno tre per lo meno i punti di intersezione.

Segno CQ = CP, e cangiato di segno alla incognita z nella formola (25.)

$$\frac{4c^2 ddy}{b\,dz^2}\,\text{sen.}\frac{\alpha}{2c} = \mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c} - n\,\text{sen.}\frac{z}{c}},$$

trovo $\dfrac{4c^2 ddy}{b\,dz^2}\,\text{sen.}\dfrac{\alpha}{2c} = \mp e^{-\frac{z}{c}} \pm e^{\frac{z}{c}}\sqrt{\cos.\dfrac{\alpha}{c} - n\,\text{sen.}-\dfrac{z}{c}}$,

o sia ponendo in cambio di $-n\,\text{sen.}-\frac{z}{c}$ la quantità eguale $n\,\text{sen.}\frac{z}{c}$,

$$\frac{4c^2 ddy}{b\,dz^2}\,\text{sen.}\frac{\alpha}{2c} = \pm e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c} + n\,\text{sen.}\frac{z}{c}}.$$

Paragonati insieme gli esponenti di comparazione della formola (25.), e dell'ultima, si scoprono eguali, ma uno negativo in riguardo all'altro. Esprime il primo la somma dei momenti rispettivamente al punto

qualunque

qualunque M della forza applicata alla porzione aM del cilindro, e dal secondo vien dinotata la somma dei momenti in riguardo al punto N della forza applicata alla parte di cilindro aegCkN. I predetti aggregati adunque sono eguali, e contrarj: ma altresì eguali e contrarj, conforme ho notato nel Corollario I. sono gli aggregati di momenti rispettivamente ai punti N, M della forza applicata alle porzioni di cilindro aegCkN, bZkCgM; dunque passa una perfetta uguaglianza fra le somme dei momenti riferiti al punto M della forza applicata alle parti di cilindro da esso punto M divise, ed essendo le nominate somme amendue cospiranti, si equilibrano mutuamente, dimodochè il cilindro non può far moto alcuno di giramento intorno qualsivoglia punto M scelto ad arbitrio.

§ 5. Si differenzj la formola (25.), onde si abbia

$$\frac{4c^3 d^3y \cdot sen.\frac{\alpha}{2c}}{-b\,dz^3} = \pm e^{\frac{z}{c}} \pm e^{\frac{-z}{c}} \sqrt{cos.\frac{\alpha}{c} + 2\,cos.\frac{z}{c}} \quad (26.)$$

La somma delle forze applicate alla porzione di cilindro aM, che ha da essere proporzionale a $\frac{d^3y}{-dz^3}$, deve serbare altresì la ragione della quantità $\pm e^{\frac{z}{c}} \pm e^{\frac{-z}{c}} \sqrt{cos.\frac{\alpha}{c} + 2\,cos.\frac{z}{c}}$. Si eguaglierà a nulla la detta somma, quando si verifichi l'equazione

$$e^{\frac{z}{c}} + e^{\frac{-z}{c}} = \frac{\mp 2\,cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{cos.\frac{\alpha}{c}}}$$

, a cui appartengono le due radici $z = \pm\frac{\alpha}{2}$. In fatti sostituito in luogo di z prima l'uno, indi l'altro valore, trovo in tutti e due i casi

$e^{\frac{\alpha}{2c}}$

$$e^{\frac{d}{2c}} + e^{\frac{-d}{2c}} = \frac{\mp 2 \cos. \frac{d}{2c}}{\sqrt{\cos. \frac{d}{c}}}$$, formola, che al numero XVII. ho provato esser vera. La radice $z = \frac{d}{n}$ mi istruisce, che quando la porzione aM del cilindro agguaglia il nulla, si applica ad essa un aggregato nullo di forze. Dalla radice $z = -\frac{d}{n}$ ci viene additato, equivalere al nulla la somma delle forze applicate all'intero cilindro AB, il che interverrebbe, qualora le forze negative pareggiano le positive.

Si cavi l'importantissima conseguenza, che ancora quando il cilindro AB si adatta alla curva del secondo genere, dalla quale l'asse AB viene tagliato in un numero impari di punti, si adempiono le due proprietà, ch'esso non possa rivolgersi intorno qualsivoglia punto M, e che sia del pari tirato da due somme di forze uguali, e contrarie. Quindi le forze MH uguali ed opposte a quelle, che tentano di farlo reciprocare, lo tengono immobile nel sito aEgCpZb, e tolta di mezzo esse forze, altro movimento, salvochè quello di vibrazione, non gli è permesso di poter acquistare.

Ridurre a computo la grandezza, o sia l'angolo $\frac{d}{c}$.

XIX. Prendo nuovamente per mano la formola (12.) $e^{\frac{d}{c}} = \frac{1 \mp \text{sen.} \frac{d}{c}}{\cos. \frac{d}{c}}$, e fatta la riflessione, che tanto $e^{\frac{d}{c}}$, quanto $1 \mp \text{sen.} \frac{d}{c}$

sono

sono sempre quantità positive, ne inferisco, che sotto tal classe dee parimente riporsi cos. $\frac{\alpha}{c}$. Fatto centro in C col raggio CA = 1 (fig. n. 5) descrivasi il circolo ABab, il quale dalle linee Aa, Bb venga partito in quattro quadranti. Se il coseno CG dell' angolo ACF, o pure il coseno Cg dell' angolo ACf hanno da essere positivi, il che succede, quando la loro direzione è da C verso A, si rende necessario, che i lati CF, Cf cadano dentro i quadranti ACB, ACb. Per la qual cosa l' angolo $\frac{\alpha}{c}$ potrà ricevere infiniti valori, i quali staranno o fra l' angolo nullo, e l' angolo retto, o fra i tre e i quattro retti, o fra i quattro e i cinque, o fra i sette e gli otto, o fra gli otto e i nove, o fra gli undici e i dodici, o fra i dodici e i tredici &c. Si esprima colla lettera g l' angolo retto, o sia il quadrante di circolo, il cui raggio = 1, e chiamato φ quell' angolo minor del retto, per cui l' angolo $\frac{\alpha}{c}$ differisca da un determinato numero di retti, ci si presenteranno le seguenti equazioni

1. $\frac{\alpha}{c} = g - \varphi$

2. $\frac{\alpha}{c} = 3g + \varphi$

3. $\frac{\alpha}{c} = 5g - \varphi$

4. $\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi$

5. $\frac{\alpha}{c} = 9g - \varphi$

6. $\frac{\alpha}{c} = 11g + \varphi$

7. $\frac{\alpha}{c} = 13g - \varphi$

&c.

Le formole, cui stanno a lato i numeri dispari, assegnano all' angolo $\frac{\alpha}{c} = ACF$

valori

valori tali, che il lato C7 cada sempre dentro il quadrante ACB. Al contrario le formole segnate coi numeri pari attribuiscono all'angolo $\frac{\alpha}{c}$ = ACf quelle grandezze, mercè le quali il lato Cf è costantemente compreso dentro il quadrante ACb.

Al punto A del circolo ABab conduco la tangente indefinita HAh, e divisi per metà ne' punti I, i i due triangoli BC7, bCf, ciascun de' quali vien dinotato dalla specie φ, delineo le secanti CIH, Cih. Descritte le linee 7G, fg parallele a Bb, 7N, fn parallele ad Aa, si tirino le rette 7B, 7b, fb, fB.

Insistendo sopra lo stesso arco 7B i due angoli 7bB alla circonferenza, 7CB al centro, si corrispondono nella ragione 1 : 2 : ma per la costruzione l'angolo 7CB è doppio dell'HCB, dunque passa eguaglianza fra gli angoli 7bB, HCB. Si osservi eguagliarsi gli angoli alterni HCB, CHA, e si deduca l'egualità degli angoli 7bM, CHA nei triangoli rettangoli 7bM, CHA, i quali perciò sono simili, e ci somministrano l'analogia bM : M7 :: HA : AC. Giacchè 7G = MC è il seno dell'angolo AC7 = $\frac{\alpha}{c}$, scopriremo bM = 1 + sen. $\frac{\alpha}{c}$. Abbiamo inoltre M7 = cos. $\frac{\alpha}{c}$, ed altresì HA = cot. $\frac{1}{2}\varphi$, cioè a dire la linea HA eguale alla cotangente dell'angolo BCI metà del BC7 = φ. Ecco adunque l'espressione analitica della sovrapposta

analogia

analogia $1 + \text{sen.}\frac{\alpha}{c} : \cos.\frac{\alpha}{c} :: \cot.\frac{1}{2}\varphi : 1$, da cui deriva l'equazione $\frac{1 + \text{sen.}\frac{\alpha}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{c}} = \cot.\frac{1}{2}\varphi$.

Abbiamo superiormente notato, che la formola $a^{\frac{\alpha}{c}} = \frac{1 + \text{sen.}\frac{\alpha}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{c}}$ ci guida alla equazione (20.) propria delle curve del secondo genere, che tagliano l'asse AB (Fig. 20.) in un numero impari di punti. Si inferisca pertanto, che a tali curve servono gli angoli ACZ (Fig. 23.), il cui lato CZ cade dentro il quadrante ACB, e che si eguagliano ad angoli retti 1, 5, 9, 13 &c. meno l'angolo φ.

Collo stesso progresso dimostrerò verificarsi l'analogia Bm : mf :: KA : AC. Noto, che essendo negativo il seno gf = Cm dell'angolo ACf $= \frac{\alpha}{c}$, la linea Bm si eguaglia ad $1 - \text{sen.}\frac{\alpha}{c}$; e quindi la premessa analogia si esprimerà così $1 - \text{sen.}\frac{\alpha}{c} : \cos.\frac{\alpha}{c} :: \cot.\frac{1}{2}\varphi : 1$; e ne risulterà l'equazione $\frac{1 - \text{sen.}\frac{\alpha}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{c}} = \cot.\frac{1}{2}\varphi$.

Fatta l'avvertenza, che dalla equazione $a^{\frac{\alpha}{c}} = \frac{1 - \text{sen.}\frac{\alpha}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{c}}$ deriva la formola (19.) spettante alle curve del primo genere, che intersecano l'asse AB (Fig. 19.) in un numero pari di punti; si deduca servire a sì fatte ~~curve~~ curve gli angoli ACf (Fig. 23.), il cui lato Cf sta dentro il quadrante ACb, e che pareggiano angoli retti 3, 7, 11 &c. più l'angolo φ.

Le cose dette ci mostrano a dito

adempiersi

adempiersi l'equazione $e^{\frac{\alpha}{c}} = \frac{1 \mp \text{sen.}\frac{\alpha}{c}}{\cos.\frac{\alpha}{c}}$ $= \text{cot.}\frac{1}{2}\varphi$, la quale comprende le curve del primo, e del secondo genere. Facendo passaggio dai numeri ai logaritmi, e richiamando a memoria essere $\log. e = 1$, averemo $\frac{\alpha}{c} = \log.\ \text{cot.}\frac{1}{2}\varphi$.

XX. Prima di passar oltre, egli è d'uopo provare, che il valore $\frac{\alpha}{c} = g - \varphi$ non può convenire a veruna curva del secondo genere, alla quale ad un cilindro, che oscilla, sia concesso adattarsi. Essendo l'angolo $\frac{\alpha}{c} = g - \varphi$ minore del retto, scopresi positivo il seno dello angolo $\frac{\alpha}{2c}$. Conforme a ciò, che ho avvertito al numero XIV. i segni inferiori della formola (20.) suppongono $\text{sen.}\frac{\alpha}{2c}$ grandezza positiva. Nel caso adunque, che presentemente si esamina, averemo $\frac{2y}{b} = \frac{\left(e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}\right)\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}{2\,\text{sen.}\frac{\alpha}{2c}}$ $+ \frac{\text{sen.}\frac{z}{c}}{\text{sen.}\frac{\alpha}{2c}}$. Posto $\frac{\alpha}{c} = g - \varphi$, non può l'ordinata y pareggiare il nulla, salvochè nella circostanza, che sia $z = 0$. Quindi non si adempierebbe quello, che nel corollario 4. del numero XVIII. ho dimostrato dover succedere, che la curva (fig. 20.) $a\,e\,g\,c\,k\,l\,b$ interséchi l'asse AB almeno in tre punti. Sia primieramente z maggiore del nulla, e giacchè il massimo valore, che possa attribuirsi a z, si è $\frac{\alpha}{2}$, ci accorgeremo essere sempre positivo $\text{sen.}\frac{z}{c}$, ed altresì il termine $\frac{\text{sen.}\frac{z}{c}}{\text{sen.}\frac{\alpha}{2c}}$.

Conciossiachè

Conciossiachè $e = 2,7182818$, scoprivamo le due quantità $e^{\frac{z}{c}}$, $e^{\frac{-z}{c}}$ l'una maggiore, e l'altra minore dell'unità, ed inferivamo, che il termine

$$\frac{e^{\frac{z}{c}} - e^{\frac{-z}{c}} \sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}{2\ \text{sen.}\frac{\alpha}{2c}}$$ si mantiene positivo costantemente. Conchiudasi, che all'assissa z positiva corrisponderebbe l'ordinata y affermativa; essendo $2y$ uguale alla somma di due termini sempre positivi, e che contro la natura della nostra equazione la curva $Cg\&a$ caderebbe tutta al dissotto del semiassa CA, nè lo taglierebbe in alcun punto medio fra C, ed A.

In simil guisa dimostravo, che supponendo z minore del nulla, vale a dire negativa, sarebbe sempre negativa l'ordinata y, e stando tutta la curva $Ck\,7b$ al dissopra del semiasse CB, non lo intersecherebbe in verun punto medio fra C, e B.

XXI. Escluso il valore $\frac{\alpha}{c} = g - \varphi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$, registro nella seguente tavola quelli, che sono confacenti alle equazioni (19.), e (20.), o sia alle curve del primo, e del secondo genere

1. $\frac{\alpha}{c} = 3g + \varphi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$
2. $\frac{\alpha}{c} = 5g - \varphi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$
3. $\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$
4. $\frac{\alpha}{c} = 9g - \varphi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$
5. $\frac{\alpha}{c} = 11g + \varphi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$
6. $\frac{\alpha}{c} = 13g - \varphi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$

&c.

Si.

Schediasma XL.

Si trovi il logaritmo iperbolico della cotangente di un qualunque angolo, prendendo il logaritmo dalle tavole, sottraendo il logaritmo del seno tutto, e moltiplicando il residuo per 2,3025851 (f)

lar

(f) I logaritmi dei seni, e delle tangenti, e quelli dei numeri appartengono alla stessa logistica, e differiscono solo nel protonumero, a cui si assegna il logaritmo nullo. I primi logaritmi hanno per protonumero $\frac{1}{100000}$, cioè a dire l'unità divisa pel seno tutto; e quindi alla unità tocca il logaritmo 5,0000000. I secondi logaritmi accettano siccome protonumero l'unità. Si cavi la conseguenza, che si farà transito da quei logaritmi a questi, scemando per 5,0000000 i logaritmi delle tavole dei seni.

Si chiamino T, t le cotangenti l'una presa dalla tavola, e l'altra relativa ad un circolo di raggio $= 1$, ambe corrispondenti allo stesso angolo $\frac{1}{2}q$, le quali debbono stare come i raggi 100000, 1. Avremo pertanto $\frac{T}{100000} = t$, e giacchè $1 : \frac{1}{100000} :: T : t$, sarà passando ai logaritmi

$\log. \frac{1}{100000} + \log. T - \log. 1 = \log. t$: ma nelle tavole dei seni $\log. \frac{1}{100000} = 0$, $\log. 1 = 5,0000000$: dunque $\log. T - 5,0000000 = \log. t$. Ho fatto l'osservazione, che si fa passaggio dai logaritmi delle tavole dei seni a quelli dei

numeri

Per alleggerire d'una qualche fatica, e rendere più acconcia, e più comodamente, ricorreremo ai logaritmi. Sia ... il logaritmo iperbolico della cotangente dello angolo $\frac{1}{2}\varphi$. Prendasi dalle tavole il logaritmo di essa cotangente, e fatta la sottrazione del logaritmo del seno tutto, quello che avanza si chiami v. Essendo adunque $u = 2,3025851 . v$, avremo prendendo nelle tavole i logaritmi de' numeri $\log. u = \log. v + 0,3622157$, e giacchè $u = \log \frac{1}{2}\varphi$, sarà altresì

$\log. u$

---

numeri, rinnovando i primi per 5,0000000. Perchè se log. T si seguiti a prendere nelle tavole dei seni, e log. z si prenda nelle tavole dei numeri, avremo $\log. T - 10,0000000 = \log. z$ ...

Trasmuteremo i logaritmi comuni in iperbolici premessa la riflessione, che riconoscendo entrambi per protonumero l'unità, i logaritmi di un qualunque numero serbano la proporzione dei logaritmi di un numero dato. Ora i logaritmi comune, ed iperbolico del numero 10 sono 1; 2,3025851; dunque facendo

$1 : 2,3025851 :: \log. T - 10,0000000 : (\log. T - 10,0000000) \cdot 2,3025851$,

il quarto termine esprimerà il logaritmo iperbolico cercato conforme alla regola da me data.

$\log. u = \log. ng \pm \varphi$. Per determinare questo ultimo logaritmo, l'angolo φ deve esprimersi in parti del raggio nella stessa guisa, che parimente in parti del raggio si denota l'angolo retto $g = 1,5707963$. Osserveremo frattanto, se riduceremo l'angolo φ in minuti secondi, e dal logaritmo di cotal numero sottrarremo costantemente $5,3144251$ (g). Così ne risulterà $\log. \varphi$, il quale, facendo ritorno ai numeri, ci somministrerà il valore dell'angolo φ, da cui dipende quello dell'angolo $\frac{\alpha}{c} = u = ng \pm \varphi$. Ho detto, che dal logaritmo del numero

dei

(g.) Abbiamo notato essere l'angolo retto $g = 1,5707963$ parti del raggio $= 1$. Lo stesso angolo si agguaglia a secondi 324000. Sia N il numero dei minuti secondi, ond'è composto l'angolo φ, e dalla analogia

$324000 : 1,5707963 :: N : \varphi$

ricaveremo il valore dell'angolo φ espresso in parti del raggio, cioè a dire $\frac{N \cdot 1,5707963}{324000} = \varphi$, e facendo transito ai logaritmi $\log. N + \log. 1,5707963 - \log. 324000 = \log. \varphi$; ma $\log. 324000 = 5,5105450$, $\log. 1,5707963 = 0,1961199$, e $5,5105450 - 0,1961199 = 5,3144251$; dunque $\log. N - 5,3144251 = \log. \varphi$, come dovea dimostrarsi.

dai secondi componenti l'angolo φ due sottrarsi 8, 3 ... 4, 4 e sim. Conciossiachè nei computi, che sian per fare, troveremo sempre il primo logaritmo minore del secondo, si accresca la caratteristica di quello per 10, e fatta poscia la sottrazione ne proverrà un logaritmo, la cui caratteristica supererà la vera per 10. Questa aumentazione ci addita, che in cambio di scrivere il numero corrispondente al nostro logaritmo nella sede, che richiede la caratteristica risultante dalla sottrazione, lo dobbiamo trasportare dieci sedi all'indietro.

XXII. Fatte queste necessarie avvertenze per agevolare, e dedurre i calcoli rettamente, non sarà difficile l'assegnare col mezzo delle approssimazioni il valore dell'angolo φ rispettivamente a qualsivoglia ~~genere~~ specie di oscillazioni. Imperciocchè attribuendo a φ alquanti valori ad arbitrio, e determinati col computo $ng \pm \varphi$, e log. cos. $\frac{1}{2}\varphi$, si scopriranno i limiti, dentro de' quali sta il vero valore dell'angolo φ; e se tali limiti sono troppo rimoti, se ne troveranno de' più vicini, e da questi finalmente si dedurrà il giusto valore dell'angolo mentovato. Pongo sotto gli occhi di chi legge i calcoli sino al numero 6., e noto essere inutile il continuarli più avanti; attesochè l'angolo φ diviene così menomissimo, che si può prezzamente supporre $\frac{d\varphi}{c} = ng$.

Computo

Computo per il numero 2. $\frac{\alpha}{c} = 3g + \varphi = \log.\cot.\frac{1}{2}\varphi$.

$\varphi = 1^{\circ}, 0', 40''$	$\varphi = 1^{\circ}, 0', 41''$
in min. sec. = 3640	in min. sec. = 3641
log = 3,5611014	log. = 3,5612207
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
log. φ = 8,2466763	log. φ = 8,2467956
φ = 0,0176472	φ = 0,0176521
$3g$ = 4,7123890	$3g$ = 4,7123890
$\frac{\alpha}{c} = 3g + \varphi$ = 4,7300362	$\frac{\alpha}{c} = 3g + \varphi$ = 4,7300411
$\frac{1}{2}\varphi = 30', 20''$	$\frac{1}{2}\varphi = 30', 20\frac{1}{2}''$
log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$ = 12,0543425	log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$ = 12,0542232
v = 2,0543425	v = 2,0542232
log. v = 0,3126728	log. v = 0,3126476
aggiungi 0,3622157	aggiungi 0,3622157
log. u = 0,6748885	log. u = 0,6748633
$\frac{\alpha}{c} = u$ = 4,7302984	$\frac{\alpha}{c} = u$ = 4,7300240
errore = + 2622	errore = − 171
altro errore = − 171	

differenza = 2793. Differenza fra i due valori dell'angolo $\varphi = 1''$. Facciasi $2793 : 2622 :: 1'' : \frac{2622''}{2793} = 0,9388''$, ed il quarto termine si aguagliarà a quella quantità, che aggiunta a $1^{\circ}, 0', 40''$ mi dà il vero valore dell'angolo

$\varphi = 1^{\circ}, 0', 40,9388''$

in min. sec = 3640,9388''

log. = 3,5612132

sottra 5,3144251

log. φ = 8,2467881

φ = 0,0176518

$3g$ = 4,7123890

$\frac{\alpha}{c} = 3g + \varphi$ = 4,7300408 grandezza adequatamente giusta dell'angolo $\frac{\alpha}{c}$ espresso in parti del raggio = 1.

Schediasma XI.

Computo per il numero 2. $\frac{\alpha}{c} = sg - \varphi = \log.\cot.\frac{1}{2}\varphi$.

$\varphi = 0, 2', 40''$	$\varphi = 0, 2', 41''$
in min. sec. $= 160$	in min. sec. $= 161$
$\log. = 2,2041200$	$\log. = 2,2068259$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
$\log.\varphi = 6,8896949$	$\log.\varphi = 6,8924008$
$\varphi = 0,0007757$	$\varphi = 0,0007806$
$sg = 7,8539816$	$sg = 7,8539816$
$\frac{\alpha}{c} = sg - \varphi = 7,8532059$	$\frac{\alpha}{c} = sg - \varphi = 7,8532010$
$\frac{1}{2}\varphi = 0, 1', 20''$	$\frac{1}{2}\varphi = 0, 1', 20\frac{1}{2}''$
$\log.\cot.\frac{1}{2}\varphi = 13,4113351$	$\log.\cot.\frac{1}{2}\varphi = 13,4086292$
$v = 3,4113351$	$v = 3,4086292$
$\log.v = 0,5329244$	$\log.v = 0,5325798$
aggiungi $0,3622157$	aggiungi $0,3622157$
$\log.u = 0,8951401$	$\log.u = 0,8947955$
$\frac{\alpha}{c} = u = 7,8548897$	$\frac{\alpha}{c} = u = 7,8486600$
errore $= +\ 16838$	errore $= -\ 45410$
altro errore $= -\ 45410$	

Differenza $= 62248$. Differenza fra i due valori dell' angolo $\varphi = 1''$. Facciasi $62248 : 16838 :: 1'' : \frac{16838''}{62248} =$ $0,27050''$ quantità da aggiungersi a $0, 2', 40''$, onde si abbia il giusto valore dell' angolo

$\varphi = 0, 2', 40,27050''$

in min. sec. $= 160,27050$

$\log. = 2,2048536$

sottra $5,3144251$

$\log.\varphi = 6,8904285$

$\varphi = 0,0007770$

$sg = 7,8539816$

$\frac{\alpha}{c} = sg - \varphi = 7,8532046$ misura fisicamente esatta dell' angolo $\frac{\alpha}{c}$ espresso in parti del raggio.

Computo per il numero 3. $\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi = \log. \cot. \frac{1}{2}\varphi$

$\varphi = 0, 0, 6''$	$\varphi = 0, 0, 7''$
log = 0,7781513	log = 0,8450980
somma 5,3144251	somma 5,3144251
log φ = 5,4637261	log φ = 5,5306729
φ = 0,0000291	φ = 0,0000339
7g = 10,9955743	7g = 10,9955743
$\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi$ = 10,9956034	$\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi$ = 10,9956082
$\frac{1}{2}\varphi = 0, 0, 3''$	$\frac{1}{2}\varphi = 0, 0, 3\frac{1}{2}''$
log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$ = 14,8373039	log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$ = 14,7703571
v = 4,8373039	v = 4,7703571
log. v = 0,6846034	log. v = 0,6785509
aggiungi 0,3622157	aggiungi 0,3622157
log. u = 1,0468191	log. u = 1,0407666
$\frac{\alpha}{c}$ = u = 11,1383051	$\frac{\alpha}{c}$ = u = 10,9841553
errore = + 1427017	errore = − 113529
altro errore = − 113529	
differenza = 1540546	

Differenza fra i due valori dell' angolo φ = 1''. Facciasi 1540546 : 1427017 :: 1''. $\frac{1427017''}{1540546}$ = 0,9263060'' porzione di secondo, che aggiunta a 0, 0, 6'', mi somministra la misura quanto basta giusta dell' angolo φ = 0, 0', 6, 9263060''

log. = 0,8405017
somma 5,3144251

log φ = 5,5260766
φ = 0,0000336
7g = 10,9955743

$\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi$ = 10,9956079 grandezza fisicamente esatta dell' angolo $\frac{\alpha}{c}$ espresso in parti del raggio. Si troverebbe con maggior precisione il valore dell' angolo φ = 6,92024 5'', supponendo $\frac{\alpha}{c}$ = u = 10,9956079, ed indi retrocedendo con metodo contrario a quello da me tenuto, sino a tanto che mi si presenta il valore di $\frac{1}{2}\varphi$ espresso in secondi. Nei numeri seguenti, a cagione della somma piccolezza dell' angolo φ, mi servirò di un tale artifizio.

Computo

Computo per il numero 4.	$\frac{\alpha}{c} = gg - \varphi$ = log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$
φ = 0; 0; $\frac{2}{7}$″	φ = 0; 0; $\frac{1}{3}$″
log. = −0,5440680	log. = −0,4771212
somma 5,3144251	somma 5,3144251
−5,8584931	−5,7915463
aggiungi 10,0000000	aggiungi 10,0000000
log. φ = 4,1415069	log. φ = 4,2084537
φ = 0,000001385	φ = 0,000001616
gg = 14,137166941	gg = 14,137166941
$\frac{\alpha}{c} = gg - \varphi$ = 14,137165556	$\frac{\alpha}{c} = gg - \varphi$ = 14,137165325

$\frac{1}{2}\varphi$ = 0, 0, $\frac{1}{7}$″	$\frac{1}{2}\varphi$ = 0, 0, $\frac{1}{6}$″
log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$ = 16,1595232	log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$ = 16,0925764
v = 6,1595232	v = 6,0925764
log. v = 0,7895472	log. v = 0,7848610
aggiungi 0,3622157	aggiungi 0,3622157
log. u = 1,1517629	log. u = 1,1470767
$\frac{\alpha}{c} = u$ = 14,182828217	$\frac{\alpha}{c} = u$ = 14,032706178
errore = + 45662661	errore = − 104459147
altro errore = − 104459147	
Differenza = 150121808.	

Differenza = 231 fra i due valori dell'angolo φ espresso in parti del raggio. Facciasi 150121808 : 45662661 :: 231 : 70 quantità, che aggiunta a 1385 mi dà l'aggiustato valore dell'angolo φ = 0,000001455. Sottraendo questo da gg, resta $\frac{\alpha}{c} = gg - \varphi$ = 14,137165486. Pongasi adunque

$\frac{\alpha}{c} = u$ = 14,137165486

log. u = 1,1503623

somma 0,3622157

log. v = 0,7881466

v = 6,1396921

log. cot. $\frac{1}{2}\varphi$ = 16,1396921

$\frac{1}{2}\varphi$ = 0,1455316″

φ = 0,2910633″ grandezza esattissima dell'angolo φ espresso in secondi.

Computo

Computo per il numero 5. $\frac{\alpha}{c} = 11g + \varphi := \log.\cot.\frac{1}{2}\varphi$

Riducendo a calcolo nel presente, e nel seguente numero il valore dell'angolo $\frac{\alpha}{c}$, trascuro siccome rispettivamente minimo l'angolo φ.

$\frac{\alpha}{c} = u = 17,2787597$

$\log. u = 1,2375125$

sottra $0,3622157$

$\log. v = 0,8752968$

$v = 7,5040691$

$\log.\cot.\frac{1}{2}\varphi = 17,5040691$

$\frac{1}{2}\varphi = 0,006461837''$

$\varphi = 0,012923673''$ misura adequatamente giusta dell'angolo piccolissimo φ espresso in secondi.

Computo per il numero 6. $\frac{\alpha}{c} = 13g - \varphi = \log.\cot.\frac{1}{2}\varphi$.

$\frac{\alpha}{c} = u = 20,4203522$

$\log. u = 1,3100632$

sottra $0,3622157$

$\log. v = 0,9478475$

$v = 8,8684449$

$\log.\cot.\frac{1}{2}\varphi = 18,8684449$

$\frac{1}{2}\varphi = 0,000279242''$

$\varphi = 0,000558483''$ valore fisicamente esatto dell'angolo φ espresso in parti di minuto secondo.

Dispongo ordinatamente nella tavola, che segue, le sei determinate grandezze dell'angolo $\frac{\alpha}{c}$ espresso in parti del raggio.

Valori dell'angolo $\frac{\alpha}{c}$ espresso in parti del raggio = 1.

(1.) $\frac{\alpha}{c} = 3g + \varphi = 4,7300408$	$\log. = 0,6748648$
(2.) $\frac{\alpha}{c} = 5g - \varphi = 7,8532046$	$\log. = 0,8950469$
(3.) $\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi = 10,9956079$	$\log. = 1,0412192$
(4.) $\frac{\alpha}{c} = 9g - \varphi = 14,1371655$	$\log. = 1,1503623$
(5.) $\frac{\alpha}{c} = 11g + \varphi = 17,2787597$	$\log. = 1,2375125$
(6.) $\frac{\alpha}{c} = 13g - \varphi = 20,4203522$	$\log. = 1,3100632$
&c.	&c.

Determinare il numero di vibrazioni fatte da un cilindro nel tempo di un minuto secondo rispettivamente a ciascun modo, che ei può oscillare.

XXIII. Si chiami m il numero, a cui si agguaglia l'angolo $\frac{L}{c}$, onde si abbia $\frac{L}{c} = m$, e conseguentemente $L = mc$, e conciossiaché al numero XIII. si è posto $c^4 = \frac{eLf}{M}$, si scoprirà $L^4 = \frac{m^4 eLf}{M}$, e perciò $f = \frac{ML^3}{m^4 e}$. Abbiamo stabilito al fine del numero III. $e = \frac{krM^2}{g^2 L^2}$. Fatta la surrogazione di un tal valore, troveremo $f = \frac{L^5 g^2}{km^4 \cdot Mr}$. Dalla prima equazione esprimente la lunghezza f del pendolo semplice isocrono impariamo serbar essa lunghezza la proporzione composta, diretta della massa, e del cubo della lunghezza dei cilindri, ed inversa del quadrato-quadrato del numero m, e della forza e, il cui valore si determina col mezzo degli esperimenti, conforme ho insegnato nei numeri V. VI. e VII. La seconda espressione ci addita, che la lunghezza f del pendolo semplice isocrono sia in ragione composta, diretta della quinta potestà della lunghezza L dei cilindri, e del quadrato della loro gravità specifica g; ed inversa del quadrato-quadrato del numero m, della massa M, e della rigidità r della materia, onde sono

formati

formati. Non hò fatta menzione del coefficiente k, perchè ho già notato al numero III. mantenersi sempre costante in tutti i cilindri

Essendo la gravità specifica eguale alla massa divisa per il volume, ed essendo la base di un cilindro proporzionale al quadrato del suo diametro, avremo g come $\frac{M}{LD^2}$, e per conseguenza M come gLD^2. Sostituiti nella nostra seconda espressione della lunghezza f del pendolo semplice isocrono prima in cambio di g, e poscia in cambio di M i valori proporzionali, troveremo

f come $\frac{L^3 M}{m^4 D^4 r}$, f come $\frac{L^4 g}{m^4 D^2 r}$.

Dalle quattro espressioni generali si deducono agevolmente le particolari. Se per esempio due cilindri sieno composti della stessa materia, e si vibrino similmente, ripiegandosi in curve, che taglino l'asse in numero eguale di punti; saranno costanti i valori delle specie g, r, m; e si scoprirà f come $\frac{L^4}{D^2}$, cioè a dire le lunghezze dei pendoli semplici isocroni in ragione composta, diretta quadruplicata delle lunghezze dei cilindri, ed inversa duplicata dei loro diametri.

XXIV. Sia h la lunghezza del pendolo semplice, che nel fare una vibrazione

c'

ci impiega un minuto secondo, dimodochè sia $h = 3{,}1668$ piedi del Reno, o pure $h =$ piedi 3 linee 4,57 del piede reale di Parigi: e giacchè le durate delle oscillazioni serbano la ragione suddu-plicata della lunghezza dei pendoli, il tempo di una vibrazione di un cilindro si aguaglierà a secondi $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{h}} = \frac{1}{m^2}\sqrt{\frac{ML^3}{he}}$ $= \frac{1}{m^2}\sqrt{\frac{L^5 g^2}{khMv}}$: Conseguentemente avremo il numero delle vibrazioni fatte dal cilindro in un minuto secondo, o sia il suono di esso cilindro, che lo chiamo $S =$ $m^2\sqrt{\frac{he}{ML^3}} = m^2\sqrt{\frac{khvM}{L^5 g^2}}$.

Se nella espressione seconda in vece di g, e di M sostituiamo i valori proporzionali $\frac{M}{LD^2}$, gLD^2, ci si presenterà S come $m^2\sqrt{\frac{vD^4}{ML^3}}$, come $\frac{m^2 D}{L^2}\sqrt{\frac{v}{g}}$.

La formola $S = m^2\sqrt{\frac{he}{ML^3}}$ serve per iscoprire il preciso numero di vibrazioni, che fa un cilindro nel tempo di un minuto secondo, potendosi determinare il valore della forza e col mezzo degli sperimenti, la grandezza della massa M col mezzo del peso, la lunghezza L con diligente misura, ed essendo cogniti la lunghezza h del pendolo a secondi, ed il numero m, conforme che il cilindro si muove piuttosto in un modo, che nell'altro.

La ultima maniera, colla quale si dinotano i suoni dei cilindri, cioè

S come $\frac{m^2 D}{L^2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, ci mette sotto degli occhi nel suo più semplice aspetto la legge, che dà regola ai suoni stessi, i quali stanno in proporzione composta, diretta duplicata del numero m, semplice dei diametri D dei cilindri, dimezzata della rigidità r della materia che li compone, e reciproca duplicata della loro lunghezza L, e dimezzata della loro gravità specifiche g.

Corollarj, che si deducono dalla formola S come $\frac{m^2 D}{L^2}\sqrt{\frac{r}{g}}$.

XXV. Dal predetto ultimo modo di esprimere i suoni dei cilindri si inferiscono parecchi corollarj.

1. Cavo subito quella conseguenza, che ha l'aria di paradosso, e che da taluno non si crederebbe, se non venisse confermata dalla esperienza, ed è che essendo il resto pari, i cilindri sono tanto più acuti, quanto il diametro loro è maggiore. Si dileguerà per altro l'apparente ripugnanza qualora si rifletta, che la forza elastica E cresce all'aumentarsi del diametro D, avendola dimostrata proporzionale a $D^4 r$ nel numero III. e cresce a proporzione più di quello si ingrandisca la massa M, laonde nella ipotesi, che presentemente si considera, abbiamo $S = m^2\sqrt{\frac{he}{ML^3}}$ proporzionale a D.

2.

2. Posto che due cilindri oscillino similmente adattandosi a curve, che intersecano l'asse in numero uguale di punti, sarà costante la specie m, e ne risulterà S come $\frac{D}{L^2}\sqrt{\frac{r}{g}}$.

3. Nella stessa supposizione troveremo la rigidità r come $\frac{S^2L^4g}{D^2}$. Col mezzo dei suoni adunque si può scoprire la proporzione fra le rigidità di varie materie, le quali rigidità, quando i cilindri sieno egualmente lunghi e grossi, accetteranno la ragione S^2g, che si compone della duplicata dei suoni, e della semplice della gravità specifiche. Queste mie determinazioni si accordano con ciò, che ha dimostrato il Co. Jacopo Riccati mio Padre nella sua Dissertazione intorno le leggi delle forze elastiche inserita nel Tomo I. dei Comentarj dell'Accademia Bolognese, e ristampata nel Tomo III. della sua Opere.

4. Se due cilindri, che si vibrano similmente, saranno formati della stessa materia, onde siano egualmente rigidi, ed egualmente gravi in ispecie, o pure se in essi le rigidità staranno come le gravità specifiche, scoprirassi S come $\frac{D}{L^2}$, cioè a dire i suoni in ragione composta, diretta dei diametri dei cilindri, ed inversa duplicata della loro lunghezze.

5. Se inoltre i due cilindri saranno simili, avremo S come $\frac{1}{L}$, o pure

S

5. come $\frac{1}{D}$, vale a dire i suoni dei cilindri simili si riguarderanno nella ragione reciproca dei lati omologhi. Questa legge abbraccia tutti i corpi simili della stessa materia formati, non eccettuate le corde, per l'esatta similitudine delle quali non basta, che i diametri siano proporzionali alle lunghezze, ma bisogna altresì, che le loro particelle siano ugualmente rigide, il che interviene, quando le corde si stendono con forze in ragione delle loro basi. Cosa maravigliosa si è, che si dia un caso, nel quale si uniscano in un solo i canoni cotanto diversi, donde prendono regola i suoni di varj corpi differenti nella struttura, e nelle circostanze, che nelle loro vibrazioni influiscono.

6. I suoni dello stesso cilindro si riferiscono nella proporzione dei quadrati m^2. Essendo $m = nq \pm \varphi$, se gli angoli φ fossero talmente piccoli, che si potessero totalmente trascurare, abbraccerebbero i suoni il rapporto dei quadrati n^2; e giacchè n si eguaglia in serie ai numeri impari 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c., i predetti suoni starebbero come i quadrati di tali numeri, cioè a dire come 9, 25, 49, 81, 121, 169 &c. Messi a computo gli angoli φ, e principalmente il più grande, che corrisponde al numero (1.), si trovano

alterate

alterata per poco più di mezzo comma $\frac{81}{80}$, il cui log. = 53950; le proporzioni 9 : 25, 9 : 49, 9 : 81 &c., nelle quali il suono grave 9 paragonasi cogli acuti. Le altre proporzioni riescono pressochè giuste; imperciocchè il maggior divario, che modifica la ragione 25 : 49, si agguaglia in logaritmi a 445 parte 61ma del comma.

Registro nella seguente tavola i sei suoni, che rende un cilindro, mentre oscillando si adatta a quella curva, che tagliano l'asse in 2, 3, 4, 5, 6, 7 punti. Paragono i suoni acuti col grave, noto le alterazioni de' rapporti 9 : 25, 9 : 49, 9 : 81 &c., ed osservo a quali semplici proporzioni si accostino i mentovati rapporti modificati.

Paragone del suono più grave di un cilindro coi suoni acuti.

Quantità proporzionali ai suoni	Loro logaritmi.

(1.) $m^2 = \overline{3g+q}^2$. log. 1,3497296

(2.) $m^2 = \overline{5g-q}^2$. log. 1,7900938 = log. $\frac{25}{9}$ − 33333, suono, che cala dalla Quarta superflua sopra l'Ottava $\frac{25}{9}$ per qualche cosa più di mezzo Comma, il cui log. = 53950.

(3.) $m^2 = \overline{7g+q}^2$. log. 2,0824384 = log. $\frac{49}{9}$ − 32448. Questo intervallo supera la Quarta sopra la doppia Ottava per 57100 quantità poco più grande del Comma.

(4.) $m^2 = \overline{9g-q}^2$. log. 2,3007246 = log. $\frac{81}{9}$ = 9 − 32475, Seconda maggiore sopra l'Ottava triplicata.

(5.) $m^2 = \overline{11g+q}^2$. log. 2,4750250 = log. $\frac{121}{9}$ − 32475, Sesta maggiore pressochè giusta sopra la tripla Ottava, crescendo solamente per 35566, parte 15.ta del Comma.

(6.) $m^2 = \overline{13g-q}^2$. log. 2,6201264 = log. $\frac{169}{9}$ − 32475, Seconda superflua sopra la quadrupla Ottava, calante per 6700 ottava parte del Comma dalla ragione $\frac{7}{6}\cdot 16 = \frac{56}{3}$ propria di esso intervallo.

XXVI. In grazia delle esperimenze, che a suo luogo riferirò, metto sotto gli occhi di chi legge la seguente Tavola, in cui, posto che il suono più grave di un cilindro sia unisono ad una corda, la cui lunghezza 60, dispongo ordinatamente le lunghezze delle porzioni della corda stessa unisone agli altri suoni di esso cilindro.

	Porzioni della corda 60 unisone ai suoni acuti di un cilindro nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda intera. Lunghezze della corda
(1.)	60
(2.)	21, 75 +
(3.)	11, 10 +
(4.)	6, 718 −
(5.)	4, 496 +
(6.)	3, 219 +
&c.	&c.

XXVII. Stabilisce rettamente il celebratissimo Signor Leonardo Eulero, che rispettivamente alla lamina elastica sia $S = m^2\sqrt{\frac{he}{ML^3}}$. Ma asserendo egli alla pag. 269 che la forza elastica e sta in ragione composta della rigidità r della materia componente la lamina, della loro larghezza D, e del quadrato G^2

della

della loro grossezza, viene ad abbracciare la proporzione S come $\frac{m^2}{L^2}\sqrt{\frac{Gr}{g}}$, la quale non si accorda colla verità, ed è riprovata dalla esperienza. Le lamine della stessa materia, simili, e similmente vibrantisi non si uniformerebbero alla legge comune a tutti i corpi simili, i cui suoni serbano la ragione reciproca dei lati omologhi. Oltre a ciò i suoni delle lamine, che differiscono solo nella grossezza, dovrebbero riferirsi nella proporzione dimezzata della grossezza, e gli esperimenti ci insegnano, che essi suoni si corrispondono nella ragione della grossezza. Col metodo da me praticato in riguardo ai cilindri si dimostra, che nella lamina la forza elastica E sta come rDG^3. Fatto uso di un tal canone, troveremo S come $\frac{m^2G}{L^2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, rapporto, che ha il fondamento di una rigorosa dimostrazione, e colla esperienza si accorda mirabilmente.

Aggiungo la importante avvertenza, che nella determinazione dei suoni della lamina elastiche non ha veruna parte la loro larghezza; dimodochè due lamine, la cui differenza consista solo nella larghezza, rendono lo stesso suono.

<u>Determinare rispettivamente a ciascun modo, in cui può oscillare un cilindro, i nodi, o punti stabili, intorno ai quali si vibra.</u>

XXVIII.

XXVIII. Dalle cose superiormente spiegate raccogliesi, che il numero dei punti immobili si agguaglia a 2, 3, 4, 5, 6, e ec., conforme che un cilindro si vibra o giusta la prima, o giusta la seconda, o giusta la terza ec. specie delle oscillazioni, che il cilindro stesso può concepire. Se il numero dei nodi è impari, un nodo cade alla metà del cilindro, e la sua posizione è determinata. Resterebbe adunque da stabilirsi il sito di due nodi nella specie di vibrazioni prima e seconda, di quattro nodi nella specie terza e quarta, di sei nodi nella specie quinta e sesta ec.; senonchè sendo collocati essi nodi a coppia a coppia a pari distanze dalla metà del cilindro, l'uno a destra, e l'altro a sinistra, basta il determinare un nodo nella prima e nella seconda specie, due nodi nella terza e nella quarta specie, tre nodi nella quinta e nella sesta specie di oscillazioni, e così di seguito.

Nel sito del punto immobile è l'ordinata $y = 0$, ed in tale ipotesi abbiamo per i corollarj terzo del numero XVI. e secondo del numero XVIII. le due equazioni $a^{\frac{z}{c}} + a^{-\frac{z}{c}} = \pm \frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{L}{c}}}$, $a^{\frac{z}{c}} - a^{-\frac{z}{c}} = \pm \frac{2\,\text{sen.}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{L}{c}}}$. Il segno negativo negli ordinari di comparazione è adattato a que' casi, nei quali sono negative le quantità $\cos.\frac{z}{c}$, $\text{sen.}\frac{z}{c}$. Se i

predetti

prodotti coseni, e seni si considereranno sempre positivi, qualunque sia la lor direzione; valerà il segno positivo, del quale farò uso costantemente. Servono le due equazioni, la prima per il genere di vibrazioni indicato coi numeri impari, la seconda per il genere di vibrazioni dai numeri pari contrassegnato.

Si stabilisca la positura di un nodo assegnando all'angolo $\frac{z}{2}$ quella precisa misura, onde secondo i varj generi di vibrazioni si verifichi o l'una, o l'altra delle premesse equazioni. Troveremo poi la grandezza fisicamente esatta dell'angolo mentovato, ponendo in opera il metodo dei limiti usato al numero XXII. per iscoprire il valore dell'angolo φ. Osserverà il Lettore nei seguenti computi, che io ristringo la misura dell'angolo $\frac{z}{2}$ fra due confini, che differiscono per un solo minuto secondo, e che dagli errori, nei quali si incorre abbracciando l'uno, o l'altro limite, ne deduco il valore adequatamente giusto dell'angolo $\frac{z}{2}$.

XXIX. Si esprima in minuti secondi l'angolo $\frac{z}{2}$, e col metodo insegnato al numero XXI., e praticato al numero XXII. in riguardo all'angolo φ si trovi il logaritmo dell'angolo $\frac{z}{2}$ espresso in parti del raggio $= 1$. Il logaritmo del numero $e = 2,7182818$ si uguaglia

a

a 0,43429448, ed il logaritmo di questo ultimo numero pareggia −0,3622157, e quindi il logaritmo del logaritmo del numero e, o sia $\log.\log.e = -0,3622157$. Sottraendo adunque dal logaritmo dell'angolo $\frac{z}{c}$ espresso in parti del raggio il numero 0,3622157, ne risulterà una quantità $= \log.\frac{z}{c} + \log.\log.e$. Si faccia transito coll'ajuto della tavola dei logaritmi ai numeri, e ci si presenterà il valore della grandezza $\frac{z}{c}\log.e$, e nuovamente passando dai logaritmi ai numeri, scopriremo il valore di $e^{\frac{z}{c}}$. Dato questo, riesce facile il ritrovare il valore di $e^{-\frac{z}{c}} = \frac{1}{e^{\frac{z}{c}}}$, e conseguentemente quello di $e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}$.

I valori dell'uno, e dell'altro omogeneo di comparazione $\frac{r\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{L}{c}}}$, $\frac{r\,\mathrm{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{L}{c}}}$ si determinano col mezzo del seguente artifizio. Prendasi dalle tavole il logaritmo del $\cos.\frac{z}{c}$, o del $\mathrm{sen}.\frac{z}{c}$, ed indi sottratto $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{L}{c}$, dal residuo nuovamente si levi il numero 4,6989700, e quello che resta si agguaglierà a $\log.\left(\frac{r\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{L}{c}}}\right)$, o pure a $\log.\left(\frac{r\,\mathrm{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{L}{c}}}\right)$ (h.)

(h.) Chiamo U, V i logaritmi presi dalla tavola dei seni della quantità $\cos.\frac{z}{c}$, $\cos.\frac{L}{c}$, e per le cose dimostrate nell'annotazione segnata (f), ed inserita

nel

Schediasma XI.

I prodotti, coseni, e seni saranno relativi al raggio = 1; siccome al principio del numero XIII è stato da me prescritto. Fatto poscia il passaggio dai logaritmi ai numeri, ci si affaccieranno i valori dei due omogenei di comparazione

$$\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}},\quad \frac{2\,\text{sen.}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}.$$

Determinato col metodo dei limiti il valore prossimamente esatto dell'angolo $\frac{z}{c}$ espresso in minuti secondi, e trovato poi il logaritmo del medesimo angolo espresso

---

nel numero XXI. saranno $U - 10,0000000$, $V - 10,0000000$ i logaritmi tolti dalle tavole dei numeri, proprj dei coseni relativi al raggio = 1 degli stessi angoli $\frac{z}{c}$, $\frac{\alpha}{c}$; dimodochè si avrà $\log.\cos.\frac{z}{c} = U - 10,0000000$, $\log.\cos.\frac{\alpha}{c} = V - 10,0000000$: ma in riguardo ai logaritmi comuni, il cui protonumero = 1,

$$\log.\left(\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}\right) = \log.\cos.\frac{z}{c} + \log.2 - \frac{1}{2}\log.\cos.\frac{\alpha}{c};$$

dunque surrogati nell'omogeneo di comparazione in cambio di $\log.\cos.\frac{z}{c}$, $\log.\cos.\frac{\alpha}{c}$, $\log.2$ i loro valori $U - 10,0000000$, $V - 10,0000000$, $0,3010300$, e ridotti i computi, troveremo $\log.\left(\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}\right) = U - \frac{1}{2}V - 4,6989700$; il che ec. La stessa dimostrazione vale per comprovare il valore assegnato a $\log.\left(\frac{2\,\text{sen.}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}\right)$.

espresso in parti del raggio = 1, si sottri
log. $\frac{L}{c}$, ed il residuo si agguaglierà a
log. $\frac{z}{L}$. I diversi valori, che può avere
log. $\frac{L}{c}$ rispettivamente alle varie ~~genere~~ specie di
oscillazioni, gli ho registrati al fine del
numero XXII. Aggiungasi log. 2 =
0,3010300, e ne risulterà il valore di
log. $\frac{z}{\frac{1}{2}L}$, col mezzo del quale le tavole ci
suggeriranno quello di $\frac{z}{\frac{1}{2}L}$, quantità,
che determina la cercata proporzione fra
la linea nota $\frac{1}{2}L$ = CA (fig. 19, 20, 21,
22, 23, 24 &c.) e la lunghezza di z
uguale per esempio a Ca, al punto
estremo a della quale il punto immobile
a corrisponda.

XXX. Dopo che ho spiegata la maniera di istituire i computi, passo ad effettuare i computi stessi, che mi hanno costata una lunga fatica, e che io continuo sino alla specie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

Schediasma XI.

Computo per la specie I. delle vibrazioni dei cilindri.

$\frac{z}{c} = 74°, 45', 23''$	$\frac{z}{c} = 74°, 45', 24''$
in min. sec. = $269123''$	in min. sec. = $269124''$
log. = 5,4299508	log. = 5,4299524
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
log. $\frac{z}{c}$ = 0,1155257	log. $\frac{z}{c}$ = 0,1155273
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
log. $\frac{z}{c}$ + log. log. e = 9,7533100	log. $\frac{z}{c}$ + log. log. e = 9,7533116
$\frac{z}{c}$ log. e = 0,5666436	$\frac{z}{c}$ log. e = 0,5666457
$e^{\frac{z}{c}}$ = 3,6867496	$e^{\frac{z}{c}}$ = 3,6867674
$e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,2712417	$e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,2712403
$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}$ = 3,9579913	$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}$ = 3,9580077

log. cos. $\frac{z}{c}$ = 9,4198295	log. cos. $\frac{z}{c}$ = 9,4198276
sottra $\frac{1}{2}$ log. cos. $\frac{\alpha}{c}$ = 4,1233764	sottra $\frac{1}{2}$ log. cos. $\frac{\alpha}{c}$ = 4,1233764
5,2964531	5,2964454
sottra 4,6949700	sottra 4,6949700
log. $\left(\frac{2 \cos. \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos. \frac{\alpha}{c}}}\right)$ = 0,5974831	log. $\left(\frac{2 \cos. \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos. \frac{\alpha}{c}}}\right)$ = 0,5974754
$\frac{2 \cos. \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos. \frac{\alpha}{c}}}$ = 3,9580665	$\frac{2 \cos. \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos. \frac{\alpha}{c}}}$ = 3,9579964
errore = + 752	errore = − 113
altro errore = − 113	
differenza = 865	

Facciasi $865 : 752 :: 1'' : \frac{752''}{865}$ $= 0,8694''$ porzione di secondo, per cui va accresciuto il minor valore dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde sia

$\frac{z}{c} = 269123,8694''$

log. = 5,4299522

sottra 5,3144251

log. $\frac{z}{c}$ = 0,1155271

sottra log. $\frac{\alpha}{c}$ = 0,6748648

log. $\frac{z}{\alpha}$ = 9,4406623

aggiungi log. 2 = 0,3010300

log. $\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha}$ = 9,7416923

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{CQ}{CA} = 0,5516864$ (fig. 15.)

Schediasma XI.

Computo per la specie II delle vibrazioni dei cilindri.

$\frac{z}{c} = 165^\circ, 32', 5''$	$\frac{z}{c} = 165^\circ, 32', 6''$
in min. sec. $= 595925$	in min. sec. $= 595926$
log. $= 5,7751916$	log. $= 5,7751924$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
$\log.\frac{z}{c} = 0,4607665$	$\log.\frac{z}{c} = 0,4607673$
sottra $0,3622157$	sottra $0,3622157$
$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.e = 0,0985508$	$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.e = 0,0985516$
$\frac{z}{c}\log.e = 1,2547317$	$\frac{z}{c}\log.e = 1,2547340$
$e^{\frac{z}{c}} = 17,9775993$	$e^{\frac{z}{c}} = 17,9776945$
$e^{-\frac{z}{c}} = 0,0556248$	$e^{-\frac{z}{c}} = 0,0556245$
$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}} = 17,9219745$	$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}} = 17,9220700$
$\log.\text{sen}.\frac{z}{c} = 9,3975807$	$\log.\text{sen}.\frac{z}{c} = 9,3975725$
sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{L}{c} = 3,4452230$	sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{L}{c} = 3,4452230$
$5,9523577$	$5,9523495$
sottra $4,6989700$	sottra $4,6989700$
$\log.\left(\frac{2\,\text{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{L}{c}}}\right) = 1,2533877$	$\log.\left(\frac{2\,\text{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{L}{c}}}\right) = 1,2533795$
$\frac{2\,\text{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{L}{c}}} = 17,9220512$	$\frac{2\,\text{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{L}{c}}} = 17,9217128$
errore $= +\ 0767$	errore $= -\ 3572$
altro errore $= -\ 3572$	
differenza $= 4339$	

Facciasi $4339 : 767 :: 1''$

$\frac{767''}{4339} = 0,1768''$ parte di secondo, che deve aggiungersi al più piccolo valore dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde si abbia

$\frac{z}{c} = 595925,1768''$

log. $= 5,7751918$

sottra $5,3144251$

$\log.\frac{z}{c} = 0,4607667$

sottra $\log.\frac{L}{c} = 0,8950469$

$\log.\frac{z}{L} = 9,5657198$

aggiungi $\log.2 = 0,3010300$

$\log.\frac{z}{\frac{1}{2}L} = 9,8667498$

$\frac{z}{\frac{1}{2}L} = \frac{Ca}{CA} = 0,7357837$ (fig. 20.)

Computo per la specie III. delle vibrazioni dei cilindri

$\frac{z}{c} = 89^\circ, 10', 41''$	$\frac{z}{c} = 89^\circ, 10', 42''$
in min. sec. = $321041''$	in min. sec. = $321042''$
log. = 5,5065605	log = 5,5065614
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
$\log.\frac{z}{c}$ = 0,1921354	$\log.\frac{z}{c}$ = 0,1921367
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
$\log.\frac{z}{c}+\log.\log.e$ = 9,4299197	$\log.\frac{z}{c}+\log.\log.e$ = 9,4299210
$\frac{z}{c}\log.e$ = 0,6759540	$\frac{z}{c}\log.e$ = 0,6759600
$e^{\frac{z}{c}}$ = 4,7419617	$e^{\frac{z}{c}}$ = 4,7419836
$e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,2108832	$e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,2108822
$e^{\frac{z}{c}}+e^{-\frac{z}{c}}$ = 4,9528449	$e^{\frac{z}{c}}+e^{-\frac{z}{c}}$ = 4,9528656
$\log.\cos.\frac{z}{c}$ = 8,1566857	$\log.\cos.\frac{z}{c}$ = 8,1565394
sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{\alpha}{c}$ = 2,7628494	sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{\alpha}{c}$ = 2,7628494
5,3938363	5,3936900
sottra 4,6989700	sottra 4,6989700
$\log\left(\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}\right)$ = 0,6948663	$\log\left(\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}\right)$ = 0,6947200
$\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}$ = 4,9529772	$\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}$ = 4,9513090
errore = + 1323	errore = − 15564
altro errore = − 15564	
Differenza = 16891	

Facciasi 16891 : 1323 :: $1'' : \frac{1323''}{16891} = 0{,}0783''$ porzione di secondo da aggiungersi al minor valore dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde si abbia

$\frac{z}{c} = 321041{,}0783''$

log. = 5,5065606

sottra 5,3144251

$\log.\frac{z}{c}$ = 0,1921355

sottra $\log.\frac{\alpha}{c}$ = 1,0412192

$\log.\frac{z}{\alpha}$ = 9,1509163

aggiungi log. 2 = 0,3010300

$\log.\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha}$ = 9,4519463

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{ca}{CA}$ = 0,2831042 (Fig. 25.)

Segue il computo per la specie III. delle vibrazioni dei cilindri:

$\frac{z}{c} = 255^{\circ}, 30', 6''$

in min. sec. $= 919806''$

log. $= 5,9636963$

sottra $5,3144251$

$\log.\frac{z}{c} = 0,6492712$

sottra $0,3622157$

$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.a = 0,2870555$

$\frac{z}{c}\log.a = 1,9366695$

$a^{\frac{z}{c}} = 86,4309940$

$a^{-\frac{z}{c}} = 0,0115700$

$a^{\frac{z}{c}} + a^{-\frac{z}{c}} = 86,4425640$

$\frac{z}{c} = 255^{\circ}, 30', 7''$

in min. sec. $= 919807''$

log $= 5,9636967$

sottra $5,3144251$

$\log.\frac{z}{c} = 0,6492716$

sottra $0,3622157$

$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.a = 0,2870559$

$\frac{z}{c}\log.a = 1,9366713$

$a^{\frac{z}{c}} = 86,4313519$

$a^{-\frac{z}{c}} = 0,0115699$

$a^{\frac{z}{c}} + a^{-\frac{z}{c}} = 86,4429218$

$\log.\cos.\frac{z}{c} = 9,3945507$

sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{d}{c} = 2,7588494$

$6,6357013$

sottra $4,6989700$

$\log.\left(\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right) = 1,9367313$

$\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}} = 86,4432869$

errore $= + \quad 7229$

altro errore $= - \quad 12485$

$\log.\cos.\frac{z}{c} = 9,3945426$

sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{d}{c} = 2,7588494$

$6,6356932$

sottra $4,6989700$

$\log.\left(\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right) = 1,9367232$

$\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}} = 86,4416733$

errore $= - \quad 12485$

Differenza $= \quad 19714$. Facciasi $19714 : 7229 ::$ $1'' : \frac{7229''}{19714} = 0,3667''$ parti di seconda, che deve aggiungersi al valore più piccolo dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde sia

$\frac{z}{c} = 919806,3667''$

log. $= 5,9636964$

sottra $5,3144251$

$\log.\frac{z}{c} = 0,6492713$

sottra $\log.\frac{d}{c} = 1,0412192$

$\log.\frac{z}{d} = 9,6080521$

aggiungi $\log.2 = 0,3010300$

$\log.\frac{z}{\frac{1}{2}d} = 9,9090821$

$\frac{z}{\frac{1}{2}d} = \frac{C2e}{CA} = 0,8111144$ (fig. 22.)

Computo per la specie IV. delle vibrazioni dei cilindri

$\frac{z}{c} = 179°, 12', 50''$	$\frac{z}{c} = 179°, 12', 51''$
in min. sec. = 645170''	in min. sec. = 645171''
log. = 5,8096742	log. = 5,8096749
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
$\log.\frac{z}{c}$ = 0,4952491	$\log.\frac{z}{c}$ = 0,4952498
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.e$ = 0,1330334	$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.e$ = 0,1330341
$\frac{z}{c}\log.e$ = 1,3584279	$\frac{z}{c}\log.e$ = 1,3584201
$e^{\frac{z}{c}}$ = 22,8533757	$e^{\frac{z}{c}}$ = 22,8554913
sottra $e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,0438107	sottra $e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,0438103
$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}$ = 22,58715650	$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}$ = 22,8416406
$\log.\text{sen}.\frac{z}{c}$ = 8,1777342	$\log.\text{sen}.\frac{z}{c}$ = 7,7759846
sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{d}{c}$ = 2,0806276	sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{d}{c}$ = 2,0806276
6,0567066	6,0565542
sottra 4,6989700	sottra 4,6989700
$\log.\left(\frac{2\,\text{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right)$ = 1,3577366	$\log.\left(\frac{2\,\text{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right)$ = 1,3575542
$\frac{2\,\text{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}$ = 22,7890714	$\frac{2\,\text{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}$ = 22,7845002
errore = + 75064	errore = − 404
altro errore = − 404	
differenza = + 75468	

Facciasi 75468 : 75064 :: 1'' : $\frac{75064''}{75468}$ = 0,9894'' porzione di secondo, che va aggiunta al minor valore dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde ei si presenti:

$\frac{z}{c}$ = 645170,9894''.
log. = 5,8096748
sottra 5,3144251

$\log.\frac{z}{c}$ = 0,4952497
sottra $\log.\frac{d}{c}$ = 1,1503623

$\log.\frac{z}{d}$ = 9,3448874
aggiungi log. 2 = 0,3010300

$\log.\frac{z}{\frac{1}{2}d}$ = 9,6459174

$\frac{z}{\frac{1}{2}d} = \frac{Cc}{CA}$ = 0,4425042 (fig. 22.)

Segue il computo per la specie IV. delle vibrazioni dei cilindri:

$\frac{z}{c}$ =	345°, 30', 15''	$\frac{z}{c}$ =	345°, 30', 16''
in min. sec. =	1243815''	in min. sec. =	1243816''
log. =	6,0947558	log. =	6,0947561
sottra	5,3144251	sottra	5,3144251
log. $\frac{z}{c}$ =	0,7803307	log. $\frac{z}{c}$ =	0,7803310
sottra	0,3622157	sottra	0,3622157
log. $\frac{z}{c}$ + log. log. e =	0,4181150	log. $\frac{z}{c}$ + log. log. e =	0,4181153
$\frac{z}{c}$ log. e =	2,6184764	$\frac{z}{c}$ log. e =	2,6184782
$e^{\frac{z}{c}}$ =	415,7922444	$e^{\frac{z}{c}}$ =	415,7929713
sottra $e^{-\frac{z}{c}}$ =	0,0024050	$e^{-\frac{z}{c}}$ =	0,0024050
$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}$ =	415,7898394	$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}$ =	415,7905663
log. sen. $\frac{z}{c}$ =	9,3984772	log. sen. $\frac{z}{c}$ =	9,3984693
sottra $\frac{1}{2}$ log. cos. $\frac{\alpha}{c}$ =	2,0806276	sottra $\frac{1}{2}$ log. cos. $\frac{\alpha}{c}$ =	2,0806276
	7,3178496		7,3178417
sottra	4,6993700	sottra	4,6993700
log. $\left(\frac{2\,\text{sen.}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}\right)$ =	2,6184796	log. $\left(\frac{2\,\text{sen.}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}\right)$ =	2,6184717
$\frac{2\,\text{sen.}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}$ =	415,7955024	$\frac{2\,\text{sen.}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}$ =	415,7877512
errore = +	56546	errore = −	38451
altro errore = −	38151		
differenza =	94737		

Facciasi 94737 : 56546 :: 1'' : $\frac{56546''}{94737}$ = 0,5973'' parte di secondo, che aggiunta al minor valore dell'angolo $\frac{z}{c}$ ci dà

$\frac{z}{c}$ =	1243815,5973''
log. =	6,0947560
sottra	5,3144251
log. $\frac{z}{c}$ =	0,7803309
sottra log. $\frac{\alpha}{c}$ =	1,1503623
log. $\frac{z}{\alpha}$ =	9,6299686
aggiungi log. 2 =	0,3010300
log. $\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha}$ =	9,9309986

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{Cnc}{CA}$ = 0,8530974 (fig. 2a.)

Computo per la specie V. delle vibrazioni dei cilindri;

$\frac{z}{c} = 89^\circ, 57', 50''$	$\frac{z}{c} = 89^\circ, 57', 51''$
in min. sec. $= 323870''$	in min. sec. $= 323871''$
log. $= 5,5103707$	log. $= 5,5103720$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
$\log.\frac{z}{c} = 0,1959456$	$\log.\frac{z}{c} = 0,1959469$
sottra $0,3622157$	sottra $0,3622157$
$\log\frac{z}{c} + \log.\log.e = 9,8337299$	$\log\frac{z}{c} + \log.\log.e = 9,8337312$
$\frac{z}{c}\log.e = 0,6819144$	$\frac{z}{c}\log.e = 0,6819165$
$e^{\frac{z}{c}} = 4,8074458$	$e^{\frac{z}{c}} = 4,8074690$
$e^{-\frac{z}{c}} = 0,2080107$	$e^{-\frac{z}{c}} = 0,2080097$
$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 5,0154565$	$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 5,0154787$
$\log.\cos\frac{z}{c} = 6,7994781$	$\log.\cos\frac{z}{c} = 6,7961045$
sottra $\frac{1}{2}\log.\cos\frac{d}{c} = 1,3984404$	sottra $\frac{1}{2}\log.\cos\frac{d}{c} = 1,3984404$
$5,4010377$	$5,3976641$
sottra $4,6989700$	sottra $4,6989700$
$\log.\left(\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right) = 0,7020677$	$\log.\left(\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right) = 0,6987141$
$\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}} = 5,0358912$	$\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}} = 4,9970552$
errore $= + \frac{1}{2}\ 203347$	errore $= - \frac{1}{2}\ 184235$
altro errore $= -\ 184235$	
Differenza $= 387582$	

Facciasi $387582 : 203347 :: 1'' : \frac{203347''}{387582} = 0,5247''$ parte di secondo da aggiungersi al valore più piccolo dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde sia

$\frac{z}{c} = 323870,5247$

log. $= 5,5103714$

sottra $5,3144251$

$\log.\frac{z}{c} = 0,1959463$

sottra $\log.\frac{d}{c} = 1,2375125$

$\log.\frac{z}{d} = 8,9584338$

aggiungi $\log.2 = 0,3010300$

$\log.\frac{z}{\frac{1}{2}d} = 9,2594638$

$\frac{z}{\frac{1}{2}d} = \frac{ca}{CA} = 0,1817456$ (fig. 28.)

Schediasma XI.

Segue il computo per la specie V. dalle vibrazioni verticali.

$\frac{z}{c} = 269^\circ, 12', 45''$	$\frac{z}{c} = 269^\circ, 12', 46''$
in min. sec. $= 969165''$	in min. sec. $= 969166''$
log. $= 5,9863977$	log. $= 5,9863982$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
$\log.\frac{z}{c} = 0,6719726$	$\log.\frac{z}{c} = 0,6719731$
sottra $= 0,3622157$	sottra $0,3622157$
$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.e = 0,3097569$	$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.e = 0,3097574$
$\frac{z}{c}\log.e = 2,0405954$	$\frac{z}{c}\log.e = 2,0405977$
$e^{\frac{z}{c}} = 109,7982567$	$e^{\frac{z}{c}} = 109,7988375$
$e^{-\frac{z}{c}} = 0,0091076$	$e^{-\frac{z}{c}} = 0,0091076$
$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 109,8073639$	$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 109,8079451$
$\log.\cos.\frac{z}{c} = 8,1380961$	$\log.\cos.\frac{z}{c} = 8,1379437$
sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{d}{c} = 1,3984804$	sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{d}{c} = 1,3984804$
$6,7396157$	$6,7394633$
sottra $4,6989700$	sottra $4,6989700$
$\log.\left(\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right) = 2,0406457$	$\log.\left(\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right) = 2,0404933$
$\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}} = 109,8109762$	$\frac{2\cos.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}} = 109,7724539$
errore $= + \quad 36123$	errore $= - \quad 354912$

altro errore $= - \quad 354912$

differenza $= \quad 391035$ Facciasi $391035 : 36123 ::$

$1'' : \frac{36123''}{391035} = 0,0924''$ parte di secondo, per cui deve accrescersi il minor valore dell' angolo $\frac{z}{c}$, onde si abbia

$\frac{z}{c} = 969165,0924''$

log. $= 5,9863978$

sottra $5,3144251$

$\log.\frac{z}{c} = 0,6719727$

sottra $\log.\frac{d}{c} = 1,2375125$

$\log.\frac{z}{d} = 9,4344602$

aggiungi $\log.2 = 0,3010300$

$\log.\frac{z}{\frac{1}{2}d} = 9,7354902$

$\frac{z}{\frac{1}{2}d} = \frac{Cae}{CA} = 0,5438638$ (Fig. 28.)

Schediasma XI.

Segue il computo per la sfera V. delle vibrazioni dei cilindri

$\frac{z}{c}$ = 4 | 35°, 30′, 11″	$\frac{z}{c}$ = 4 | 35°, 30′, 12″
in min. sec. = 1 | 567411″	in min. sec. = 1 | 567412″
log. = 6,1952936	log. = 6,1952939
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
log. $\frac{z}{c}$ = 0,8808685	log. $\frac{z}{c}$ = 0,8808688
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
log. $\frac{z}{c}$ + log. log. a = 0,5186528	log. $\frac{z}{c}$ + log. log. a = 0,5186531
$\frac{z}{c}$ log. a = 3,3010555	$\frac{z}{c}$ log. a = 3,3010578
$a^{\frac{z}{c}}$ = 2000,1174574	$a^{\frac{z}{c}}$ = 2000,1240516
$a^{-\frac{z}{c}}$ = 0,0005000	$a^{-\frac{z}{c}}$ = 0,0005000
$a^{\frac{z}{c}} + a^{-\frac{z}{c}}$ = 2000,1179574	$a^{\frac{z}{c}} + a^{-\frac{z}{c}}$ = 2000,1245516
log. cos. $\frac{z}{c}$ = 9,3945100	log. cos. $\frac{z}{c}$ = 9,3945019
sottra $\frac{1}{2}$ log. cos. $\frac{L}{c}$ = 1,3944804	sottra $\frac{1}{2}$ log. cos. $\frac{L}{c}$ = 1,3944804
8,0000296	8,0000215
sottra 4,6989700	sottra 4,6989700
log. $\left(\frac{2 \cos. \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos. \frac{z}{c}}}\right)$ = 3,3010596	log. $\left(\frac{2 \cos. \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos. \frac{L}{c}}}\right)$ = 3,3010515
$\frac{2 \cos. \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos. \frac{L}{c}}}$ = 2000,1363427	$\frac{2 \cos. \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos. \frac{L}{c}}}$ = 2000,0990327
errore = + 183853	errore = − 295189

altro errore = − 295189

differenza = 479042 Facciasi 479042 : 183853 :: 1″ : $\frac{183853''}{479042}$ = 0,38388″ porzione di secondo, che unita al minor valore dell'angolo $\frac{z}{c}$ ci dà

$\frac{z}{c}$ = 1567411,38388″

log. = 6,1952938

sottra 5,3144251

log. $\frac{z}{c}$ = 0,8808687

sottra log. $\frac{L}{c}$ = 1,2375125

log. $\frac{z}{L}$ = 9,6433562

aggiungi log. 2 = 0,3010300

log. $\frac{z}{\frac{1}{2}L}$ = 9,9443862

$\frac{z}{\frac{1}{2}L} = \frac{C3e}{CA}$ = 0,8798045 (fig. 28.)

Computo per la specie VI. delle vibrazioni dei cilindri

$\frac{z}{c} = 179^\circ, 57', 56''$	$\frac{z}{c} = 179^\circ, 57', 57''$
in min. sec. = 647876''	in min. sec. = 647877''
log = 5,8114919	log. = 5,8114926
sottra 5,3144251	5,3144251
$\log.\frac{z}{c}$ = 0,4970668	$\log.\frac{z}{c}$ = 0,4970675
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
$\log.\frac{z}{c}+\log.\log.e$ = 0,1348511	$\log.\frac{z}{c}+\log.\log.e$ = 0,1348518
$\frac{z}{c}\log.e$ = 1,3641153	$\frac{z}{c}\log.e$ = 1,3641175
$e^{\frac{z}{c}}$ = 23,1263891	$e^{\frac{z}{c}}$ = 23,1269063
sottra $e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,0432399	$e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,0432397
$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}$ = 23,0835492	$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}$ = 23,0836666

$\log.\sin.\frac{z}{c}$ = 6,7789965	$\log.\sin.\frac{z}{c}$ = 6,7706810
sottra $\frac{1}{2}\log.\cos\frac{d}{c}$ = 0,7162924	sottra $\frac{1}{2}\log.\cos\frac{d}{c}$ = 0,7162924
6,0627041	6,0543886
sottra 4,6989700	4,6989700
$\log.\left(\frac{2\sin.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right)$ = 1,3637341	$\log.\left(\frac{2\sin.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right)$ = 1,3554186
$\frac{2\sin.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}$ = 23,0606941	$\frac{2\sin.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}$ = 22,6642829
errore = 229489	errore = − 4153437
altro errore = − 4153437	
differenza = 4343326	

Facciasi 4343326 : 229489 :: 1'' : $\frac{229489}{4343326}''$ = 0,05284'' parte di secondo da aggiungersi al minor valore di $\frac{z}{c}$, onde ne risulta

$\frac{z}{c}$ = 647876,05284''

log. = 5,8114919

sottra 5,3144251

$\log.\frac{z}{c}$ = 0,4970668

sottra $\log.\frac{d}{c}$ = 1,3100632

$\log.\frac{z}{d}$ = 9,1870036

aggiungi log. 2 = 0,3010300

$\log.\frac{z}{\frac{1}{2}d}$ = 9,4880335

$\frac{z}{\frac{1}{2}d} = \frac{ca}{CA}$ = 0,3076335 (fig. 24).

Segue il computo per la specie VI. della vibrazione dei cilindri.

$\frac{z}{c} = 359°, 12', 45''$	$\frac{z}{c} = 359°, 12', 46''$
in min. sec. $= 1293165''$	in min. sec. $= 1293166''$
log. $= 6,1116539$	log. $= 6,1116542$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
$\log.\frac{z}{c} = 0,7972288$	$\log.\frac{z}{c} = 0,7972291$
sottra $0,3622157$	sottra $0,3622157$
$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.e = 0,4350131$	$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.e = 0,4350134$
$\frac{z}{c}\log.e = 2,7227837$	$\frac{z}{c}\log.e = 2,7227456$
$e^{\frac{z}{c}} = 528,1421168$	$e^{\frac{z}{c}} = 528,1825349$
sottra $e^{-\frac{z}{c}} = 0,0018933$	sottra $e^{-\frac{z}{c}} = 0,0018937$
$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}} = 528,1402235$	$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}} = 528,1825349$
$\log.\,sen.\frac{z}{c} = 8,1780961$	$\log.\,sen.\frac{z}{c} = 8,1779437$
sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{d}{c} = 0,7162924$	sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{d}{c} = 0,7162924$
$7,4218037$	$7,4216513$
sottra $4,6989700$	sottra $4,6989700$
$\log.\left(\frac{2\,sen.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right) = 2,7228337$	$\log.\left(\frac{2\,sen.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}}\right) = 2,7226813$
$\frac{2\,sen.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}} = 528,2429440$	$\frac{2\,sen.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{d}{c}}} = 528,0575942$
errore $= +\ 627205$	errore $= -\ 1249407$
altro errore $= -\ 1249407$	
differenza $= 1876612$	

Facciasi $1876612 : 627205 :: 1'' : \frac{627205''}{1876612} = 0,3342''$ porzione di secondo, per cui dee aumentarsi il minor valore di $\frac{z}{c}$, onde sia

$\frac{z}{c} = 1293165,3342''$

log. $= 6,1116540$

sottra $5,3144251$

$\log.\frac{z}{c} = 0,7972289$

sottra $\log.\frac{d}{c} = 1,3100632$

$\log.\frac{z}{d} = 9,4871657$

aggiungi $\log.2 = 0,3010300$

$\log.\frac{z}{2d} = 9,7881957$

$\frac{z}{2d} = \frac{Cae}{CA} = 0,6143867$ (fig. 24)

Segue il computo per la specie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$\frac{z}{c} = 5\,25^\circ, 30', 11''$	$\frac{z}{c} = 5\,25^\circ, 30', 12''$
in min. sec. $= 1891811''$	in min. sec. $= 1891812''$
$\log. = 6,2768777$	$\log. = 6,2768779$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
$\log.\frac{z}{c} = 0,9624526$	$\log.\frac{z}{c} = 0,9624528$
sottra $0,3622157$	sottra $0,3622157$
$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.a = 0,6002369$	$\log.\frac{z}{c} + \log.\log.a = 0,6002371$
$\frac{z}{c}\log.a = 3,9832440$	$\frac{z}{c}\log.a = 3,9832459$
$a^{\frac{z}{c}} = 9621,5265487$	$a^{\frac{z}{c}} = 9621,5685841$
sottra $a^{\frac{-z}{c}} = 0,0001039$	sottra $a^{\frac{-z}{c}} = 0,0001039$
$a^{\frac{z}{c}} - a^{\frac{-z}{c}} = 9621,5264448$	$a^{\frac{z}{c}} - a^{\frac{-z}{c}} = 9621,5684802$
$\log.\operatorname{sen}.\frac{z}{c} = 9,3985400$	$\log.\operatorname{sen}.\frac{z}{c} = 9,3985019$
sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{\alpha}{c} = 0,7162924$	sottra $\frac{1}{2}\log.\cos.\frac{\alpha}{c} = 0,7162924$
$8,6822476$	$8,6822095$
sottra $4,6989700$	sottra $4,6989700$
$\log.\left(\frac{2\operatorname{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}\right) = 3,9832476$	$\log.\left(\frac{2\operatorname{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}}\right) = 3,9832395$
$\frac{2\operatorname{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}} = 9621,6061947$	$\frac{2\operatorname{sen}.\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos.\frac{\alpha}{c}}} = 9621,4269912$
errore $= +\ 797499$	errore $= -\ 1414890$
altro errore $= -\ 1414890$	

Differenza $= 2212389$. Laonde $2212389 : 797499 :: 1'' : \frac{797499''}{2212389} = 0,3605''$ quantità da aggiungersi al più piccolo valore dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde vi si presenti

$\frac{z}{c} = 1891811,3605''$

$\log. = 6,2768778$

sottra $5,3144251$

$\log.\frac{z}{c} = 0,9624527$

sottra $\log.\frac{\alpha}{c} = 1,3100632$

$\log.\frac{z}{\alpha} = 9,6523895$

aggiungi $\log.2 = 0,3010300$

$\log.\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = 9,9534195$

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{CSa}{CA^2} = 0,8982961$ (Fig. 24)

Schediasma XI.

Confermare colla esperienza la scoperta legge dei suoni dei cilindri.

XXXI. Egli è d'uopo confermare colla esperienza le verità insegnateci dalla teorica. Do principio dal paragonare insieme i suoni principali, cioè a dire i più gravi di varj cilindri. Feci lavorare tre cilindri di acciajo A, B, C; ed ordinai, che i due primi fossero egualmente grossi, e diversamente lunghi in ragione di $\sqrt{2}$: 1. Il primo ed il terzo doveano avere uguali le lunghezze, ed ineguali i diametri in proporzione di 4 : 5. L'Artefice non eseguì esattissimamente la mia intenzione, e le misure dei cilindri furono le seguenti, che per me si esprimono in linee del piede Real di Parigi.

Misura del cilindro A. D = lin. 9 , L = lin 46.
Misura del cilindro B. D = lin 9 , L = lin 61.
Misura del cilindro C. D = lin. $11\frac{1}{2}$, L = lin. 47.

Differendo i due cilindri A, B solamente nella lunghezza, i loro suoni debbono corrispondersi in ragione inversa duplicata delle lunghezze, cioè a dire come $\overline{61}^2 : \overline{46}^2$, o sia come 3721 : 7396. Questo rapporto si accosta molto al semplice 1 : 2 proprio della Ottava, ed il divario consiste nella proporzione 7396 : 7442, ossia nella fisicamente uguale 161 : 162, metà pressochè giusta del Comma 80 : 81. In fatti percossi i cilindri A, B, trovai, che i loro suoni in Ottava un poco calante si riferivano.

Giusta il canone da me stabilito i suoni dei cilindri A, C debbono stare in ragione composta, diretta semplice dei

Diametri

diametri, ed inversa duplicata della lunghezza, vale a dire come $\frac{9}{86^2} : \frac{11\frac{1}{2}}{87^2}$.
Questa proporzione riducesi alla seguente 68121 : 85054, la quale discorda pochissimo dalla semplice 4 : 5 conveniente alla Terza maggiore. La differenza s'eguaglia al rapporto 8505400 : 8515125, cioè prossimamente a 875 : 876, undecima parte all'incirca del Comma 80 : 81, minuzia così piccola, che non viene dall'orecchio anche più perito notata. Dati al confronto i suoni dei due cilindri A, C, si conformavano alla teorica, ed il cilindro più grosso C rese un suono una Terza maggiore più acuto di quello del cilindro più sottile A.

XXXII. Mi rivolsi all'esame dei suoni, che giusta le varie specie di oscillazioni un cilindro produca. Feci primieramente lavorare con diligenza a martello, e lima un cilindro E di acciajo, ed indi ne feci gittare un altro F di bronzo, il quale fu poscia ripulito sul torno, e ridotto alla maggiore esattezza, che fu possibile.
Misure del cilindro E di acciajo D = lin. 6, L = lin. 259.
Misure del cilindro F di bronzo D = lin. 6, L = lin. 257½.
Gli volli assai sottili rispettivamente alla loro lunghezza, e tollerai, che il loro suono più grave riuscisse muto, perchè si rendessero sensibili i suoni acuti, il che non interviene, quando la

grossezza

grossezza alla lunghezza ha quella proporzione, che si ricerca, acciocchè il suono principale, e più grave acquisti corpo, e si faccia udire grato al sensorio.

Segnai accuratamente i nodi, o punti stabili in riguardo alle diverse specie di vibrazioni, e sottoposti a sì fatti punti i sostegni, si sentivano chiari e distinti i sei primi suoni in ambo i cilindri. Avendo dentro questi limiti ristretto i miei calcoli, non mi sono più oltre dilatato nè pure colle osservazioni. Avverto, che gli scannelli debbono essere vestiti di una materia cedente, per esempio di panno. Io mi servij di due funicelle, le quali erano forse un po troppo dure, e credo, che sarebbero meglio riusciti due grossi spaghi. Anche rispettivamente alla corda, mentre si vogliono far suonare diverse sue parti aliquote, bisogna adoprare degli ostacoli leggieri, e appoggiarli ad uno di que' punti, che separano una parte aliquota dall'altra. Veggasi ciò, che ho scritto in tale proposito ai numeri XX. e XXI. dello Schediasma IV., che tratta delle vibrazioni della corda sonora.

Accordai all'unisono col suono principale del cilindro e di acciajo una corda divisa in parti 60, ed un'altra corda egualmente lunga, e similmente partita la ridussi all'Ottava alta del suono principale del cilindro F di bronzo. Rendeva questo un suono talmente grave, che mettendo con esso all'unisono la predetta corda, avrebbe

avrebbe della sonorità fatto perdita. Per separare dal rimanente quelle porzioni di corda, che sono unisone ai suoni secondo, terzo, quarto &c. dell'uno, e dell'altro cilindro, ho posto in opera uno scannello, la cui base si eguaglia ad una porzione sessantesima della corda, ed è distribuita in parti cento. Con questo artifizio si ottiene la divisione della corda in parti 6000.

Nel numero XXVI. ho posto in serie le porzioni della corda 60, che secondo la teorica debbono stare all'unisono coi suoni acuti di un cilindro nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda intera. Questa progressione serve per il cilindro a di acciajo, ed in riguardo al cilindro b di bronzo, il cui suono principale è unisono alla corda 120, si hanno da prendere porzioni il doppio lunghe delle mentovate.

Le seguenti due Tavole sono formate da tre colonne. I numeri della prima esprimono la specie delle vibrazioni. La seconda contiene le porzioni della corda 60, che giusto la teorica deggiono corrispondere all'unisono coi suoni acuti dei cilindri. Nella terza si comprendono le parti della stessa corda, che messa in opera la maggiore attenzione, si sono trovate unisone ai suoni nominati, prestandomi diligente assistenza il Signor Domenico Bianchi valente organista, ed accuratissimo accordatore di gravecembali.

Porzioni della corda 60. unisone ai suoni acuti del cilindro di acciajo nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda 60.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezza delle porzioni giusto la teorica.	Lunghezza delle porzioni giusto l'esperienza.
I.	60.	60.
II.	21,75	21,75.
III.	11,1	11,15
IV.	6,717	6,9
V.	4,496	4,7
VI.	3,219	2,9

Porzioni della corda 60. unisone ai suoni acuti del cilindro 7 di bronzo nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda 120.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezza delle porzioni giusto la teorica.	Lunghezza delle porzioni giusto l'esperienza.
I.	120	120.
II.	43,8	43,8
III.	22,2	22,3
IV.	13,434	13,6
V.	8,992	9,1
VI.	6,438	6,7.

Però vero dire il cilindro 7 di bronzo era di figura più esatta di quello di acciajo, ed oltre a ciò di materia più uniforme, ed omogenea, siccome formato

per

per via di fusione, e quindi le sue voci acute con più aggiustatezza di quelle del cilindro e di acciajo si accomodavano ai suoni dalla teorica determinati. La maggior differenza in ambo i cilindri si udiva nel sesto suono, il quale nel cilindro di acciajo cresceva sopra il corrispondente stabilito col computo per la ragione 2900 : 3219, o sia prossimamente per qualche cosa meno di 9 : 10, che è quanto a dire per un Tuono un poco calante. Al contrario nel cilindro di bronzo il predetto suono calava dall'analogo fissato dal calcolo per il rapporto 6700 : 6434, cioè per una proporzione media fra le due 25 : 24, 26 : 25 esprimente un Semituono minore scarso. I notati opposti divarj danno a conoscere, che se ci fosse un cilindro di perfettissima figura, e composto di materia squisitamente omogenea, renderebbe i suoni esattamente unisoni a quelli, che mi è riuscito di scoprire nel presente Schediasma.

<u>Determinare la proporzione fra la rigidità dell'acciajo, e del bronzo, dei quali erano composti i cilindri usati nel riferito esperimento.</u>

XXXIII. Non tralascio di determinare la proporzione fra la rigidità dell'acciajo, e del bronzo, ond'erano formati i nostri cilindri; Ho notato nel corollario terzo contenuto nel numero XXV, che mentre

Due

Schediasma XI.

due cilindri oscillano similmente, le loro rigidità r stanno come $\frac{S^2 L^4 g}{D^2}$.

essendo il diametro D costante in amendue i cilindri e, 7, le masse M stanno come Lg, e le rigidità r come $S^2 L^3 M$. Il cilindro di bronzo era unisono a parti $91\frac{1}{2}$ della corda 60 unisona al cilindro di acciajo; e quindi i suoni S dei due cilindri di acciajo, e di bronzo si riguardavano nella ragione $91\frac{1}{2} : 60$, o sia 61 : 40. Ho già detto nel precedente numero XXXI. che le lunghezze L serbavano il rapporto $259 : 257\frac{1}{2}$, cioè in numeri interi 518 : 515. Pesò il cilindro e oncie 25, il cilindro 7 oncie 27; e per conseguenza le masse M si riferivano nella ragione 25 : 27. Sostituiti in cambio delle specie analitiche i convenienti valori, troveremo le rigidità dello acciajo e del bronzo componenti i nostri cilindri come $\overline{61}^2 . \overline{518}^3 . 25 : \overline{40}^2 . \overline{515}^3 . 27$; o sia ridotti i computi come 517188606872 : 237584232000, proporzione che sta di mezzo fra le due 24 : 11, 13 : 6, avvicinandosi per altro più alla prima, che alla seconda.

<u>Determinare la proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli.</u>

XXXIV. Chiudo la mia fatica collo stabilire la ragione fra le lunghezze, ed

i

i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; affinché rendano suoni ugualmente forti, e aggradevoli. I cilindri di metallo, o di vetri, i quali compongono uno stromento, si percuotono con eguali forze vive, e per conseguenza oscillando di pari forze vive fornite le acquistano. Collo stesso metodo usato in riguardo alla corda nello Schediasma VI. potrei dimostrare, che tali cilindri rendono suoni ugualmente forti. Questi suoni in oltre debbono riuscire del pari aggradevoli, il che dipende dalla proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei varj cilindri, la quale mi accingo ad indagare presentemente. Qualche stromento da me veduto non si estendeva salvo che per due Ottave; ed era formato di cilindri, che differivano solo nella lunghezza. Per verità i cilindri estremi cadevano in difetti opposti; imperciocché i più gravi erano troppo pieghevoli, e producevano suoni per dir così senza corpo; ed al contrario i più acuti erano troppo grossi, e poco flessibili, dimodoché i loro suoni si sperimentavano ottusi.

La masse M, m di due cilindri della stessa materia stanno come $LD^2 : ld^2$, e giacché sono pari le forze vive MV^2, mv^2, si verifica l'analogia $V : v :: \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}D} : \frac{1}{l^{\frac{1}{2}}d}$. Si assegni alla velocità la legge perfettamente media fra i limiti stabiliti nei numeri X e XI. del citato Schediasma VI. onde si abbia $V : v :: \frac{1}{T^{\frac{3}{4}}} : \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$, e scopriremo

esser

essere $L^{\frac{1}{2}}D : l^{\frac{1}{2}}d :: T^{\frac{3}{4}} : t^{\frac{3}{4}}$, e conseguentemente $L^{\frac{2}{3}}D^{\frac{4}{3}} : l^{\frac{2}{3}}d^{\frac{4}{3}} :: T : t$. Ci insegna il corollario 4. contenuto nel numero XXV. che se due cilindri formati della stessa materia si vibrano similmente, stanno i loro suoni come $\frac{D}{L^2} : \frac{d}{l^2}$: ma i tempi delle vibrazioni accettano la ragione inversa dei suoni; dunque $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$, e perciò $L^{\frac{2}{3}}D^{\frac{4}{3}} : l^{\frac{2}{3}}d^{\frac{4}{3}} :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$, analogia, da cui derivano le due seguenti $L : l :: D^{\frac{7}{4}} : d^{\frac{7}{4}}$, $D : d :: L^{\frac{4}{7}} : l^{\frac{4}{7}}$. Nel ragione de' tempi delle vibrazioni $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ si sostituiscano prima in cambio di L, l, indi in cambio di D, d i valori proporzionali, e scopriremo, effettuati i necessarj calcoli, $D : d :: T^{\frac{2}{5}} : t^{\frac{2}{5}}$, $L : l :: T^{\frac{7}{10}} : t^{\frac{7}{10}}$. Regolate a norma di queste leggi le dimensioni dei cilindri, riusciranno i loro suoni egualmente grati alle orecchie.

Stimo bene di illustrare la teorica con un esempio. Due cilindri si corrispondano in quintupla Ottava, onde sia $T : t :: 32 : 1 :: 2^5 : 1$. Fatto uso di tali valori in luogo dei tempi T, t, ci si presenterà $D : d :: 4 : 1$, $L : l :: \sqrt{128} : 1$, o prossimamente $11{,}31.37 : 1$.

Assai prossima alla prescelta sarebbe la legge $V : v :: \frac{1}{T^{\frac{2}{3}}} : \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$, da cui si dedurrebbe $D^2 : d^2 :: L : l$, $D : d :: T^{\frac{1}{3}} : t^{\frac{1}{3}}$, $L : l :: T^{\frac{2}{3}} : t^{\frac{2}{3}}$. La sua maggiore semplicità renderebbe

la

le misure dei cilindri più facili da correggiare.

XXXIV. Conciossiachè gli stromenti composti di cilindri siano di poco uso, e se ne lavorino in piccola quantità, non han potuto gli industriosi Artefici colla replicata sperienza condurli a quella perfezione, di cui sono capaci. Giudico adunque opportuna cosa il distendere una tavola, che per lo spazio di due Ottave contenga le lunghezze, ed i diametri dei cilindri secondo la più perfetta legge $L : l :: T^{\frac{7}{10}} : t^{\frac{7}{10}}$. $D : d :: T^{\frac{2}{5}} : t^{\frac{2}{5}}$. La nominata tavola è formata da sei colonne. La prima comprende le lettere naturali, e le modificate dal Diesis, e dal b molle disposte conforme la scala degli usuali stromenti da tasto, presa per base la lettera C. Nella seconda colonna stanno disposti i logaritmi dei suoni convenienti a ciascuna lettera, e temperati giusta il metodo da me spiegato nel _Saggio sopra le leggi del Contrappunto_ pag. 116. Contiene la terza colonna i logaritmi delle lunghezze dei cilindri componenti la detta scala, i quali battuti con forze eguali hanno da produr suoni, che riescano egualmente grati all'udito. Si veggono collocate ordinatamente nella quarta colonna le lunghezze di essi cilindri. Seguono finalmente la colonna quinta, e sesta; e sono registrati in quella i logaritmi dei diametri dei nostri cilindri;

in

in questa le misure dei diametri stessi. Le colonne principali rispettivamente alle presenti ricerche sono la quarta, e la sesta, in grazia della determinazion delle quali ho posto la colonna seconda, terza, e quinta.

Ecco il metodo da me tenuto per determinare la colonna quarta, e sesta. Sia l la lunghezza di un cilindro, d il diametro, t il tempo di una vibrazione, n il numero delle oscillazioni fatte in tempo dato, o sia il suono di esso cilindro. Ho provato nel precedente numero XXXIV. dover essere l come $t^{\frac{7}{10}}$: ma t come $\frac{1}{n}$; dunque l come $\frac{1}{n^{\frac{7}{10}}}$, e passando dall'analogia alla equazione, $l = \frac{L}{n^{\frac{7}{10}}}$. L è una costante da determinarsi in progresso. Dai numeri faccio transito ai logaritmi, e mi si presenta la formola $\log. l = \log. L - \frac{7}{10} \log. n$. Serve questa per istabilire il valore della costante L. Il logaritmo del suono n prodotto dal cilindro C base dello stromento si eguaglia a nulla; dunque in tal caso $\log. l = \log. L$, e per conseguenza $l = L$, cioè a dire la costante L uguale alla lunghezza h del cilindro C base dello stromento, la quale si suppone nella mia tavola divisa in parti 10000. Si troverà pertanto il logaritmo della lunghezza l di un cilindro detraendo dal $\log. L$, o sia dal logaritmo del numero 10000 le sette decime parti del logaritmo del suono, che il

detto

detto cilindro deve produrre. Determinato così log. l, le tavole dei logaritmi mi additano il valore della lunghezza cercata l.

In riguardo ai diametri dei cilindri ho dimostrato essere d come $l^{\frac{2}{5}}$, come $\frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}$. Quindi ne nascono le formole $d = \frac{D}{n^{\frac{2}{5}}}$, $\log. d = \log. D - \frac{2}{5} \log. n$. D è il diametro del cilindro C base dello strumento, che suppongo diviso in parti 1000. Sottratte dal log. 1000 le due quinte parti del logaritmo del suono n, che deve rendere il cilindro; ne risulterà il logaritmo del diametro d, la di cui misura relativa a quella del diametro D competente al cilindro C verrà resa nota dalle tavole logaritmiche.

Sarà facile l'ampliare la seguente tavola alle tre, alle quattro, alle cinque Ottave, valendosi della regola del tre. Quella stessa proporzione, che ha C, la cui lunghezza 10000, a C#, la cui lunghezza 9640, la serba parimente C, la cui lunghezza 3749, a C#, che posta in uso la nominata regola si troverà lungo 3613. Con pari metodo si scoprirà il diametro del detto C# 8.va, e si passerà poscia a stabilire le dimensioni di D, di e^b, di e ec.

Sebbene poteva bastare il dilatar la tavola ad una sola Ottava. Determinato il secondo C, che in relazione al primo è lungo 6156, grosso 754, si prendano per data la mentovata

misura

misure, e dividendo la lunghezza in parti 10000, il diametro in parti 1000, chiaramente si scoprirà, che la distribuzione della prima Ottava serve altresì per la seconda, e per tutte le altre, che seguono.

Per valersi utilmente della nostra tavola, fra varj cilindri pari di diametro, e diversi di lunghezza bisogna scegliere quello, che renda un suono vigoroso e chiaro, esclusi gli altri, che o per essere troppo lunghi rispettivamente alla grossezza producono un suono snervato, e senza corpo, o per essere troppo corti tramandano un suono ~~troppo~~ muto, ed ottuso. Se il cilindro prescelto si trova unisono col C base di uno stromento corista, si intenda divisa la sua lunghezza in parti 10000, il suo diametro in parti 1000, ed in relazione a tali divisioni si stabiliscano le misure dei cilindri più acuti a norma della mia tavola. Che se lo stesso cilindro fosse unisono ad un altro suono per esempio A della prima Ottava; dovendo essere giusta la tavola la lunghezza di un tal cilindro 6965, ed il diametro 613 nei detti numeri di parti 6965, 613 si concepiscano distribuiti la lunghezza, ed il diametro ~~del~~, ed in riguardo a sì fatti compartimenti si determinino coll'ajuto della mia tavola le dimensioni dei cilindri più gravi, e più acuti del dato cilindro A.

Se la lunghezza, ed il diametro del cilindro prescelto fossero dati

esempigrazia

esempigrazia in linee, si potranno trovare la misura degli altri cilindri espressa parimente in linee col mezzo della regola del tre. Siano cogniti in linee la lunghezza, ed il diametro del cilindro A appartenente alla prima Ottava, e si voglia sapere di quante linee debbono esser composti la lunghezza, ed il diametro del cilindro C base dello stromento. Si faccia come la lunghezza del cilindro A a quella del cilindro C notate nella mia tavola, cioè come 6965 a 10000, così il numero di linee, che formano la lunghezza del cilindro A, al quarto termine proporzionale, il quale si eguaglierà al numero delle linee, che hanno da formare la lunghezza del cilindro C. Non altrimenti se faremo come 813 a 1000 diametri, che la mia tavola assegna ai cilindri A, C, così il numero delle linee, onde consta il diametro del cilindro A, al quarto termine proporzionale; pareggerà questo il numero delle linee componenti il diametro cercato del cilindro C.

In uno stromento lavorato conforme il mio metodo gli scannelli, su i quali si appoggiano i cilindri, e che debbono stradare sotto i loro circoli di ammovimento, hanno ad essere di figura curva, la quale facilmente si descrive, essendo nota dei mentovati circoli la posizione.

Schediasma XI.

Lunghezze, e Diametri dei cilindri per l'estensione di due Ottave temperate conforme il mio metodo.

	Logaritmi dei suoni	Log. delle lunghezze dei cilindri	Lunghezze dei cilindri	Log. dei diametri dei cilindri	Diametri dei cilindri
C	0,0000000	4,0000000	10000	3,0000000	1000
C♯	0,0227556	3,9840711	9640-	2,9908978	979+
D	0,0492444	3,9655289	9237-	2,9803008	956
E♭	0,0757412	3,9469812	8851-	2,9697035	933-
E	0,0984964	3,9310525	8532+	2,9606013	913+
F	0,1258908	3,9118764	8163½	2,9496437	891-
F♯	0,1481958	3,8962629	7875+	2,9407217	872+
G	0,1751392	3,8774026	7540½	2,9299443	851+
G♯	0,1983454	3,8611582	7264-	2,9206618	833+
A	0,2243876	3,8429287	6965+	2,9102450	813+
B♭	0,2513310	3,8240683	6669+	2,8994676	793+
B	0,2736360	3,8084548	6434-	2,8905456	777+
C	0,3010300	3,7892790	6156-	2,8795880	758-
C♯	0,3237856	3,7733501	5934+	2,8704858	742+
D	0,3502784	3,7548051	5686	2,8598886	724+
E♭	0,3767712	3,7362602	5448+	2,8492915	707-
E	0,3995268	3,7203312	5252+	2,8401893	692+
F	0,4269208	3,7011554	5025+	2,8292317	675-
F♯	0,4492258	3,6855419	4848-	2,8203097	661+
G	0,4761692	3,6666816	4642-	2,8095323	645-
G♯	0,4993754	3,6504372	4471+	2,8002498	631+
A	0,5254176	3,6322077	4288-	2,7898330	616+
B♭	0,5523610	3,6133473	4105+	2,7790556	601+
B	0,5746660	3,5977338	3961-	2,7701336	589+
C	0,6020600	3,5785580	3789+	2,7591760	574+

Schediasma XII.

Della comunicazione di moto fra due corpi molli, o elastici perfettamente, e specialmente di quella, che si effettua col mezzo di una corda elastica.

I. La comunicazione del moto fra due corpi si effettua certamente col mezzo di una forza media, la quale conforme le varie circostanze accelera un corpo e ritarda l'altro; o pure gli ritarda o accelera tutti e due. Benché sia generalmente ignota la legge, con cui questa forza vada variando, il che dipende dalla figura dei corpi, e dalla relazione fra la compressione dei corpi stessi, e le forze comprimenti; tuttavia dalla sola natura della forza media si deducono tutte le velocità corrispondenti, da cui sono animati i corpi durante la comunicazione del moto, le quali al mutarsi della legge della forza media, non patiscono alterazione veruna. E questa è la ragione, per cui al cangiamento di figura, e di rigidità nei corpi, purché siano molli, o elastici perfettamente, persistono invariati i canoni della comunicazione del moto fra i corpi dell'una, o dell'altra specie, i quali canoni si debbono riputare necessarj, avendo in altra occasione dimostrata altresì necessaria la legge delle azioni delle forze continuamente applicate.

Dalla natura della forza media

procede

proceda, che si conservi sempre o la stessa somma, o la stessa differenza delle quantità di moto primitiva, secondochè le velocità iniziali hanno la medesima direzione, o pure una direzione contraria.

Si osserva in oltre un'altra curiosissima proprietà, che per quanto si muti l'indole della forza media, avrà essa sempre esercitata la stessa somma di vicazioni, quando i due corpi sono forniti di quella tal coppia di velocità, e questa somma sarà la massima, quando i due corpi camminano con velocità uguale. E siccome si eguaglia a nulla nel primo istante della comunicazione del moto; ha parimente lo stesso valore nell'ultimo istante della comunicazione medesima.

Aggiungasi, che i corpi, mentre fanno transito dalla velocità primitiva a quella ad entrambi comune, si ammaccano in tempo pari all'altro, in cui ricuperano la loro figura, se sono elastici, passando dalla velocità comune alla terminale. Quanta vicazione ha esercitata la forza media nel primo tempo, altrettanta ancora esercita nel secondo; e quando terminata la comunicazione del moto, la somma della forza viva dei corpi si eguaglia a quella, che gli animava in principio. E conciossiachè in due istanti la forza viva perduta abbia lo stesso valore, mentre cioè i corpi si costipano,

e [illegible] s'impie-
gano tempi eguali a perdere la detta forza, e a ricuperarla.

L'idea vaga della forza media influisca soltanto negli spazj passati dai corpi durante la comunicazione del moto, e nei tempi impiegati a percorrerli; cangiando questi spazj, e questi tempi misura, secondochè si muta e la figura de' corpi, e la loro durezza, benchè persistano costanti le loro masse.

II. Dedurrò prima dalla idea della forza media la mutua velocità dei corpi, e tutte l'altre proprietà, che ho accennate: e giacchè mi si offrirà l'occasione, stabilirò le limitazioni, colle quali si può far uso del metodo del moto trasfuso, di cui parecchi Autori si sono serviti utilmente.

Prenderò poscia a considerare una forza media conosciuta, supponendo, che si comunichi il moto col mezzo di una corda elastica; e farò vedere, che al variarsi di questa forza media, nasce mutazione negli spazj, per cui camminano i corpi, mentre si effettua la comunicazione del moto, e nel tempo in essa impiegato. Non lascierò altresì di notare quanto si alterino i detti spazj e tempi, allora che si diversificano le masse, e le velocità de' due corpi.

Quantunque il celebratissimo Signor Leonardo Eulero nel tomo quarto degli Atti di Pietroburgo, ed il P. Vincenzo Riccati mio fratello nel

suo

suo Dialogo delle forze vive della legge delle forze continuamente applicate, e abbiamo dedotta quella della communicazione del moto; ho presa risoluzione di por mano anch'io nella stessa materia, a cagione principalmente di spiegare le affezioni della partecipazione del moto mediante una corda elastica; le cui distensioni rispettivamente alle forze, che le producono, sono state da me determinate nello Schediasma I. ~~[illegible]~~ . II

E poichè nello stesso Schediasma al numero XVII. ho stabilita la relazione fra le compressioni di un cilindro, e la forza che le cagionano; dirò qui che cosa del tempo, in cui due cilindri si comunicano il movimento; ed indi colla scorta di un esempio farò vedere, qualmente si possa indagare il tempo della comunicazione del moto fra corpi forniti di figura diversa dalla cilindrica.

Determinare le mutue velocità di due corpi molli, o elastici perfettamente, mentre segue fra loro la comunicazione del moto.

III. La massa M colla velocità A urti direttamente nella massa m, che camminava colla velocità ±a. Se le velocità sono ambedue positive, egli è certo, che esser dee A > a, onde il corpo M possa urtare nel corpo m

In

In uno degli istanti dalla comunicazione del moto si muovano i due corpi colle velocità V, ±v, e siano per conseguenza formate delle quantità di moto MV, ±mv. La forza media spinge i due corpi a destra, e a sinistra per direzioni contrarie, e reagisce, o agisce per quegli stessi spazj, per cui camminano i corpi. Quindi si può usare la formola della forza riferita ai tempi; la quale mi insegna, che se le velocità V, v hanno la medesima direzione, nel tempicello dt quantità di moto x si leva al corpo M, quanta se ne aggiunga al corpo m; dimodochè le nuove quantità di moto sono MV − x; mv + x. Raccolte queste in una somma, restituiscono la quantità precedente di moto MV + mv. Che se la velocità se è affetta dal segno negativo, le due quantità di moto una positiva, e l'altra negativa calano per la stessa variazione x nel tempo dt, onde divengono MV − x, − mv + x, e formandone la somma ne risulta MV − mv, ch'è la quantità di moto antecedente. Succedendo ciò in qualunque momento, ne segue necessariamente, che debba conservarsi la primitiva quantità di moto MA ± ma, e che per conseguenza si avrà l'equazione $MA \pm ma = MV + mv$, dalla quale si deduce $\frac{M.\overline{A-V}}{m} \pm a = v$ (1)

IV. Resi noti i valori corrispondenti delle velocità V, v; i quali nulla

dipendono

dipendono dalla figura, e dalla durezza dei corpi M, m; cerchiamo quali grandezze ad esse competono negli ultimi istanti della comunicazione del moto o siano i corpi molli, od elastici: egli è fuori di dubbio, che sarà compiuta la comunicazione del moto colle leggi dei corpi molli, quando le due masse M, m si movono con pari velocità per la medesima direzione; imperocchè in tal circostanza il corpo, che precede, più non resiste a quello, che gli viene dietro; e non potendo i corpi ammaccati riprendere la loro figura, siccome quelli che si suppongono molli, non succede più azione, o reazione della forza media, che alteri la loro velocità. Facendo dunque nella formola $MA \pm ma = MV \pm mv$ $V = v$, troveremo la velocità comune ai due corpi nell'ultimo momento della comunicazione del moto per i corpi molli $\frac{MA \pm ma}{M+m} = V = v$ (2.)

Se da principio le velocità dei due corpi hanno la medesima direzione, anche la velocità comune seguita la direzione primiera. Ma se le predette velocità iniziali sono contrarie, la velocità comune prende la direzione di quel corpo, che è fornito di maggior quantità di moto. Sia $MA > ma$, e la velocità v del corpo m prima di cangiar direzione diverrà $= 0$. In tale istante mi insegna la formola (1)

essere

essere $V = \frac{MA - ma}{M}$. Che se $MA < ma$,
la velocità V si annulla nell'atto di
mutar direzione; e quindi in tal cir=
costanza $v = \frac{MA - ma}{m}$. Ella è poi
facile da cavare la conseguenza, che
quando $MA = ma$ nella ipotesi delle
velocità contrarie, la velocità comune
non seconda la direzione nè dell'uno,
nè dell'altro corpo; laonde esser
dee = 0, conforme chiaramente
ditta la formola (2.) ....
V. ... In tutti gli istanti antecedenti
quello della comune velocità il corpo
M o ha sempre urtato il corpo m, che
continuamente gli ha resistito, o pure
ha sostenuto l'urto di quello; e però
nell'istante ultimo di avvicinamento
dei due corpi è giunta al colmo, che
è quanto a dire è pervenuta alla mas-
sima grandezza la vessazione della
forza media e ma siccome ad essa
vessazione eguale dee la perdita della
forza viva nei corpi M, m; dunque
nel mentovato istante alla forza viva
perduta il massimo valore compete.
Quando le due masse M, m
camminano colle velocità V, v, sono
fornite della forza viva $\frac{MV^2 + mv^2}{2}$

$$= \frac{MV^2}{2} + \frac{M^2}{2m} \cdot \overline{A^2 - 2AV + V^2} \pm Ma \cdot \overline{A - V} + \frac{ma^2}{2} \quad (3.)$$

, sostituendo in cambio
di v il suo valore somministrato
dalla formola (1.). E conciossiachè
nel primo istante della contrazione

zione

zione del moto fosse la forza viva $= \frac{MA^2}{2} + \frac{ma^2}{2}$, ne segue che nella contusione dei corpi, o sia nella variazione della forza media si sia consumata la forza viva $\frac{MA^2}{2} + \frac{ma^2}{2} - \frac{MV^2}{2}$

$$- \frac{M^2}{2m} \cdot \overline{A^2 - 2AV + V^2} \mp Ma \cdot \overline{A - V} - \frac{ma^2}{2}$$

$$= \frac{Mm - M^2 \cdot A^2 \mp 2MmAa}{2m} + \frac{2MA \pm 2Mma \cdot V}{2m}$$

$$- \frac{M^2 - Mm}{2m} \cdot V^2 \; (4).$$

Sarà massima questa forza, qualora la sua flussione si agguagli al nulla. Prese le differenze, e ridotto il calcolo, scopriremo $V = \frac{MA \pm ma}{M+m}$; ma quando V ha un tal valore, ad esso parimente si eguaglia v; dunque la forza viva perduta è la massima, allorchè i due corpi si muovono congiuntamente colla stessa velocità $= \frac{MA \pm ma}{M+m}$, conforme di sopra aveva già stabilito. Sostituisco la grandezza trovata di V nella formola (4), e fatto il computo, mi si presenta la massima forza viva consumata nella contusione, o sia nella variazione della forza media $= \frac{Mm}{} \cdot \overline{A \mp a}^2$ (5.), la quale rimane sempre la stessa, purchè non si alterino le masse M, m, nè la quantità, e la direzione delle loro primitive velocità A, ±a.

VI. Avverto per altro, che non si varierà la forza viva perduta, quando

le

terminasse, per le velocità dei corpi si cangino in modo tale, che la quantità $\frac{Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{2 \cdot Mm}$ conservi lo stesso valore.

Non si muti la grandezza $\frac{Mm}{2 \cdot Mm}$, e non si altererà la forza viva perduta, purchè la velocità relativa $A \mp a$ dei due corpi rimanga la stessa, la quale si agguaglia ad $A-a$, se i corpi si muovono per la medesima direzione, e ad $A+a$, se la direzione è contraria. Ora la velocità relativa non cangia, qualora alle velocità iniziali A, $\pm a$ si aggiunga, o si levi la stessa velocità $\pm b$. Se dunque o non variandosi le masse M, m, o pure variandosi colla condizione, che sia costante il valore $\frac{Mm}{2 \cdot Mm}$, i corpi si moveranno colle velocità primitive A, $\pm a$, ovvero colle altre $A \pm b$, $\pm a \pm b$, si farà sempre la medesima perdita di forza viva. Quindi o si muovano i due corpi M, m colle velocità A, $\pm a$ sopra una nave ferma, o pure sopra una nave, che camminasse per la direzione della comunicazione del moto colla velocità $\pm b$, onde rispettivamente allo spazio immobile i corpi predetti siano forniti delle celerità $A \pm b$, $\pm a \pm b$, seguirà sempre nell'aggregato dei due corpi la medesima perdita di forza viva; e perciò il moto traslato nella mentovata perdita di forza viva non cagiona alterazione veruna.

VII. Se qualcuno frattanto pensasse, che il moto traslato nulla cangiasse la

forza

forza viva perduta, o acquistata da ciascun corpo, si ingannerebbe a partito. Illustro la seconda con un esempio. Dentro una nave quieta si muovano i corpi M, m colle velocità A, $-a$; e giunto il corpo M alla velocità comune anche al corpo m $= \frac{MA-ma}{M+m}$, avrà perduta la forza viva $\frac{MA^2}{2} - \frac{M}{2}\left(\frac{MA-ma}{M+m}\right)^2$; e se la velocità comune sia nulla, il che succede, quando $MA-ma=0$, avrà scapitata l'intiera forza viva $\frac{MA^2}{2}$. Venga impressa alla nave la velocità $-A$, ed accaderà, che in riguardo allo spazio immobile il corpo M starà in quiete, ed il corpo m camminerà colla velocità $-A-a$. Terminata la comunicazione del moto colla legge dei corpi molli, i due corpi viaggeranno colla comune velocità $\frac{m.-A-a}{M+m} = -A$ nella ipotesi di $MA-ma=0$, ed il corpo M in vece di perdere la forza viva $\frac{MA^2}{2}$, ne avrà fatto acquisto. Nel caso della nave quieta la forza media resiste al corpo M, e colla sua reazione ne diminuisce la forza viva. Ma nel caso della nave in moto, essendo da principio privo di velocità il detto corpo, la forza media esercita azione dalla parte dello stesso, e forza viva gli imprime.

VIII. Ritorno in sentiero, e poichè la massima forza viva perduta dall'aggregato dei due corpi per una

parte

parte non dipende dalla legge, con cui cresca, o cala la forza media, e poi li altri si eguagliano alla reazione della forza media prodotta; ella è dimostrativa la proprietà, che per quanto si muti l'indole di essa forza media, il variarsi della figura, e della diversità dei corpi, avrà sempre esercitata la stessa somma di reazione, quando le due masse date M, m fornite dal principio delle velocità A, a, saranno giunte a camminar di conserva colla velocità $\frac{MA \pm ma}{M+m}$.

Lo stesso si verifica anche quando si muovono colle velocità corrispondenti V, $v = \frac{M.\overline{A-V}}{m} \pm a$; imperciocchè assegnato ad V un valore medio fra A, ed $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, e sostituitolo nella formola (4.) il valore, che ne risulta, della forza viva perduta non ha veruna dipendenza dalla figura, e dalla diversità delle masse.

IX. Ora egli è di uopo determinare la velocità terminali dei nostri due corpi, posto che siano elastici. La compressione giunta al massimo, allora quando i due corpi camminando colla comune velocità $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, si restituisca nei corpi elastici, i quali ricuperano la loro primitiva figura. Mentre i corpi passano dalla velocità iniziale alla comune, l'elastro si carica; e questo poi si scarica, mentre i corpi elastici furono ricevuti dalla velocità

velocità comune alla fine, la forza viva si è consumata nel cangiar detti elastri, o sia nella variazione della forza media; altrettanta se ne riacquista nello sciogliersi detti elastri stesso, o togliersi dio detti alterazioni della forza media predetta. Quindi terminata la comunicazione del moto, la forza viva perduta ha da annullarsi; e ripresa dai corpi la loro figura, ha da svanire per conseguenza la forza media, la quale non può però alterare le loro velocità. Avendo per mano la formola (4.) esprimente la misura della forza viva perduta, si faccia essa uguale a nulla, onde ne nasca l'equazione, dividendo prima per $\frac{M}{2m}$, $\overline{m-M}.A^2 \mp 2mAa + \overline{2MA \pm 2ma}.V - \overline{M-m}.V^2 = 0$. Maneggiata questa formola colle note regole, finalmente si scopre

$$V = \frac{MA \pm ma}{M+m} \mp \frac{m.\overline{A \mp a}}{M+m} = \begin{cases} \dfrac{\overline{M-m}.A \pm 2ma}{M+m} & (6.) \\ A \end{cases}$$

Si osservi, che la forza viva perduta è uguale a nulla in due casi, cioè a dire nel principio, e nel fine della comunicazione del moto. Supponendo dunque nulla la detta forza, ho da trovare due valori della velocità V, uno competente al primo istante della comunicazione

del

del moto per l'altro all'ultimo; ma A è la primitiva velocità del corpo M; dunque $\frac{\overline{M-m}\cdot A \pm 2ma}{M+m}$ è la velocità terminale.

La 1ª velocità A, $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, $\frac{\overline{M-m}\cdot A \pm 2ma}{M+m}$ iniziale, media, terminale ai due corpi; e quale compongono una serie aritmetica decrescente per la differenza $\frac{m\cdot \overline{A \mp a}}{M+m}$, per cui la velocità media è superata dalla iniziale, e supera la terminale.

La formula (1.) $\frac{M\cdot \overline{A-V}}{m} \pm a = v$ mi insegna l'ultima velocità del corpo m, sostituendo in cambio di V il suo valore corrispondente $\frac{\overline{M-m}\cdot A \pm 2ma}{M+m}$. Si scopre pertanto in tal caso $v = \frac{2MA - \overline{M-m}\cdot \pm a}{M+m}$ (2.)

Anche le 3 velocità $\pm a$; $\frac{MA \pm ma}{M+m}$; $\frac{2MA - \overline{M+m}\cdot \pm a}{M+m}$ prima, media, ed ultima del corpo m formano una serie aritmetica, con questo divario però, che in cambio di calare, essa cresce per la differenza $\frac{M\cdot \overline{A \mp a}}{M+m}$, per la quale la velocità media eccede la prima, ed è minore della terza.

X La differenza $\frac{m\cdot \overline{A \mp a}}{M+m}$, per cui la velocità primitiva del corpo M supera

supera la media, e questa la finale, conserverà lo stesso valore, quando non si avvertano dalle masse M, m, nè la velocità relativa $A \mp a$. Lo stesso dicasi della differenza $\frac{M.\overline{A \mp a}}{M+m}$, per la quale la velocità iniziale del corpo m viene superata dalla media, e questa dalla terminale [illegible] le velocità [illegible] si muovono, quelora alle velocità primitive A, $\pm a$ si aggiunga, o si levi la stessa quantità b. Per la qual cosa accresciute, o diminuite le velocità primitive per la grandezza b, avremo le seguenti due serie, che esprimeranno le velocità iniziale, media, e finale dei corpi M, m

$$A \pm b, \quad \frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b, \quad \frac{\overline{M-m}.A \pm 2ma}{M+m} \pm b;$$

$$\pm a \pm b, \quad \frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b, \quad \frac{-\overline{M+m}.\pm a + 2MA}{M+m} \pm b.$$

Quindi rettamente argomentiamo, che sendo le velocità iniziale, media, e finale dei due corpi M, m, che si comunicano il moto dentro una nave quieta, eguali ai residui delle due serie

$$A, \quad \frac{MA \pm ma}{M+m}, \quad \frac{\overline{M-m}.A \pm 2ma}{M+m};$$

$$\pm a, \quad \frac{MA \pm ma}{M+m}, \quad \frac{-\overline{M+m}.\pm a + 2MA}{M+m},$$

impressa alla nave per la direzione della comunicazione del moto la velocità $\pm b$, onde i corpi da principio si moveano rispettivamente allo spazio immobile colle velocità $A \pm b$, $\pm a \pm b$, si avranno

in

in riguardo al detto spazio le velocità media, e finali, aggiungendo alle precedenti la velocità $\pm b$, della nave. Il moto traslato adunque si può usare con sicurezza, quando si tratta di determinare le velocità dei corpi, che si comunicano il movimento.

Non tralascio di avvertire, che si danno dalle altre circostanze, in cui le mentovate differenze conservano lo stesso valore: ma io ho notato quella soltanto, che mi conduceva alla dimostrazione dell'uso retto, che possiam fare del moto traslato.

XI. Che se qualcuno bramasse una dimostrazion generale, che poste V, v le velocità dei corpi M, m, le cui velocità iniziali A, $\pm a$, le corrispondenti velocità degli stessi corpi, che da principio si movevano colle velocità $A \pm b$, $\pm a \pm b$, abbiano ad essere $V \pm b$, $v \pm b$; eccola, ed assai facile. Se V per esempio sia media aritmetica fra A, ed $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, anche $V \pm b$ sarà media aritmetica fra $A \pm b$, ed $\frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b$.

Dovendo passare il corpo M dalla prima velocità $A \pm b$ alla media $\frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b$, si ha da dare un istante, in cui sia fornito dalla velocità $V \pm b$. Supposta dunque nel detto corpo una tale velocità, dico che il corpo m camminerà nello stesso momento colla velocità $v \pm b$.

$v \pm b$. e voglia il vero, giacchè conservandosi sempre la medesima quantità di moto, nella prima ipotesi, $MA \pm ma = MV + mv$, sarà parimente $MA \pm Mb \pm ma \pm mb = M.\overline{A \pm b} + m.\overline{\pm a \pm b} = MV \pm Mb + mv \pm mb = M.\overline{V \pm b} + m.\overline{v \pm b}$. e ma $M.\overline{A \pm b}$, $m.\overline{\pm a \pm b}$ sono nella seconda ipotesi la quantità di moto primitiva dei corpi M, m, ed $M.\overline{V \pm b}$ è la quantità di moto attuale del corpo M, la cui velocità $V \pm b$; dunque nello stesso istante la quantità di moto $m.\overline{v \pm b}$ compete al corpo m, il quale per conseguenza procede colla velocità $v \pm b$.

XII. La forza viva perduta ha sempre due valori uguali, uno mentre si forma la contusione, e l'altro mentre si restituisce, cioè a dire uno fra la velocità primitiva, e la media, e l'altro fra la velocità media e la terminale. La egueglianza di tali valori richiede, che le velocità per esempio del corpo M differiscano del pari dalla velocità media; il che posto, la forza perduta in ambo gli incontri si eguaglierebbe. Siano dunque le due velocità del corpo M

$$\frac{MA \pm ma}{M+m} + \frac{x}{M}, \quad \frac{MA \pm ma}{M+m} - \frac{x}{M},$$

ed il corpo m si appropierà le velocità $\frac{MA \pm ma}{M+m} - \frac{x}{m}$, $\frac{MA \pm ma}{M+m} + \frac{x}{m}$ così richiedendo la dimostrata proprietà

proprietà, che si conservi costante la quantità primitiva di moto $MA \pm ma$. Se son uguali la forza viva perdita, ha da passare altresì uguaglianza fra le aggregate delle forze vive dei corpi M, m nelle due notate circostanze. In fatti scegliendo la prima coppia delle velocità dei corpi M, m, avremo la loro forza viva $\frac{MV^2+mv^2}{2}$ =

$$\frac{M}{2}\cdot\overline{\left(\frac{MA\pm ma}{M+m}\right)^2+\left(\frac{MA\pm ma}{M+m}\right)\cdot\frac{2x}{M}+\frac{x^2}{M^2}}$$

$$+\frac{m}{2}\cdot\overline{\left(\frac{MA\pm ma}{M+m}\right)^2+\left(\frac{MA\pm ma}{M+m}\right)\cdot\frac{-2x}{m}+\frac{x^2}{m^2}}$$

$$=\frac{\overline{MA\pm ma}^2}{2\cdot\overline{M+m}}+\frac{x^2}{2M}+\frac{x^2}{2m}.$$

L'altra coppia delle velocità dei corpi M, m mi dà la loro forza viva $\frac{MV^2+mv^2}{2}$ =

$$\frac{M}{2}\cdot\overline{\left(\frac{MA\pm ma}{M+m}\right)^2+\left(\frac{MA\pm ma}{M+m}\right)\cdot\frac{-2x}{M}+\frac{x^2}{M^2}}$$

$$+\frac{m}{2}\cdot\overline{\left(\frac{MA\pm ma}{M+m}\right)^2+\left(\frac{MA\pm ma}{M+m}\right)\cdot\frac{2x}{m}+\frac{x^2}{m^2}}$$

$$=\frac{\overline{MA\pm ma}^2}{2\cdot\overline{M+m}}+\frac{x^2}{2M}+\frac{x^2}{2m}$$

uguale a quella, che in primo luogo ho esposta.

Se dunque è pari la forza viva perduta, l'elastro intermedio fra i due corpi è in ambo gli incontri ugualmente cimentato, ed è per conseguenza uguale la forza media, la quale nel tempicello di estinguersi esercitava nel corpo M

in

in ambe le circostanze due uguali elementi di quantità di moto, e perciò gli si perdono due uguali menomi gradi di velocità: e quindi gli scemamenti di velocità, che tra di loro sono uguali, mentre il corpo M si trasferisce dalla velocità iniziale alla media, e da questa alla finale, si effettuano per gradi uguali in tempicelli uguali; laonde nei detti scemamenti si impiegano gradatamente da un canto e dall'altro tempi uguali. Lo stesso dicasi degli accrescimenti di velocità nel corpo m. Si inferisca dunque, che in tempi uguali i corpi passano dalla velocità prima alla media, e dalla media all'ultima; che in tempi uguali segue la contrazione, o sia la reazione della forza media, a cui si uguaglia la forza viva perduta; e la restituzione della contrazione, o sia la azione della forza media, a cui si uguaglia la forza viva riacquistata. Mutata la figura dei corpi, e la rigidità delle loro fibre, crescerebbero, o calerebbero bensì i detti due tempi, ma sempre conservandosi uguali, la qual uguaglianza dalla natura della forza media dipende.

XIII. O si muovano i corpi M, m colle velocità primitive A, $\pm a$, o pure colle altre $A \pm b$, $\pm a \pm b$; onde la velocità relativa $A \mp a$ conservi sempre lo stesso valore, la

comunicazione

comunicazione del moto o' fra di corpi molli, o fra gli elastici si effettuerà in ambo le circostanze nel tempo stesso. Egli è d'uopo dimostrare, che quando i corpi M, m camminano nel primo caso colle velocità V, v, e nel secondo colle velocità V±b, v±b posi è fatta perdita del medesimo aggregato di forze vive, e per conseguenza lo elastro medio è ugualmente caricato.

Nel primo caso la forza viva perduta si agguaglia ad $\frac{MA^2}{2}+\frac{ma^2}{2}-\frac{MV^2}{2}-\frac{mv^2}{2}$, e nel secondo la forza viva perduta ha il seguente valore

$$\frac{M}{2}\cdot\overline{A\pm b}^2+\frac{m}{2}\cdot\overline{\pm a\pm b}^2-\frac{M}{2}\cdot\overline{V\pm b}^2-\frac{m}{2}\cdot\overline{v\pm b}^2$$

$$=\frac{MA^2}{2}+\frac{ma^2}{2}-\frac{MV^2}{2}-\frac{mv^2}{2}$$

$$\pm b\cdot\overline{M\cdot\overline{A\pm b}+m\cdot\overline{\pm a\pm b}-M\cdot\overline{V\pm b}-m\cdot\overline{v\pm b}}:$$

ma stantechè si mantiene costante=mente la stessa quantità di moto, $M\cdot\overline{A\pm b}+m\cdot\overline{\pm a\pm b}=M\cdot\overline{V\pm b}+m\cdot\overline{v\pm b}$, o sia $M\cdot\overline{A\pm b}+m\cdot\overline{\pm a\pm b}-M\cdot\overline{V\pm b}-m\cdot\overline{v\pm b}$ $=0$; dunque cancellata la quantità $=0$, si trova anche nel secondo caso come nel primo la forza viva perduta dai corpi M, m $=\frac{MA^2}{2}+\frac{ma^2}{2}-\frac{MV^2}{2}-\frac{mv^2}{2}$.

Per la qual cosa lo elastro è premuto in ambedue le circostanze dalla medesima forza, e nel tempicello di cagionà [illegible] nel corpo M la stessa alterazione di quantità di moto, e conseguentemente ancora di velocità. Perciò il corpo suddetto impiegherà

impiegherà pari tempo in ambo gli incontri nel passaggio dalla velocità primitiva A, ovvero A±b alla media $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, ovvero $\frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b$, le quali differiscono per la stessa quantità $m.\frac{A \mp a}{M+m}$; e quindi in pari tempo seguirà la comunicazione del moto colla legge dei corpi molli.

Non altrimenti passerà il corpo M in egual tempo dalla velocità media $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, ovvero $\frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b$ alla terminale $\frac{\overline{M-m}.A \pm 2ma}{M+m}$, ovvero $\frac{\overline{M-m}.A \pm 2ma}{M+m} \pm b$, le quali differiscono per la medesima quantità $m.\frac{A \mp a}{M+m}$, e perciò in egual tempo si compierà in tutti e due i casi la partecipazione del moto conforme la legge dei corpi elastici.

Il perchè o si muovano i due corpi M, m sopra una nave quieta, o pure sopra una nave che per la durazione della comunicazione del moto viaggi colla velocità ±b, di modo che rispettivamente allo spazio immobile siano forniti della velocità A±b, ±a±b, nella comunicazione del moto si spenderà sempre il medesimo tempo. Il moto traslato adunque non cagiona veruna alterazione nel tempo della

partecipazione

partecipazione del moto.

XIV. Giacchè non mi è nota la legge generalmente la legge, con cui varia la forza media fra due corpi, che si comunicano il moto col mezzo dell'urto, facciamo che il moto si partecipi mediante una corda elastica, la legge delle forze della quale rispettivamente alle distensioni è stata da me scoperta. Prima di ogni altra cosa metto in chiaro il meccanismo, di cui la natura si serve: e perchè riuscirebbe troppo lungo il considerare tutti i casi, suppongo che i due corpi nel primo istante si muovano per la medesima direzione, e che sendo M > m, la direzione del corpo M mai non si muti. Sin tanto che dal principio della comunicazione del moto sino a quell'istante, nel quale i corpi camminano con eguale velocità, il corpo M è più celere del corpo m, la corda più si allunga dalla parte di quello ritardandolo, e meno si accorcia dalla parte di questo accelerandolo; di maniera che effettivamente si allunga, e con tale ragione, che diventa massima, quando i corpi si muovono con pari velocità, diminuisce l'aggregato delle forze vive dei corpi stessi. Ma dopo il predetto momento sendo il corpo M meno veloce del corpo m, la corda meno si allunga dal canto del corpo M ritardandolo, e più si accorcia dal

canto

canto del corpo m accelerandolo; lascian= do realmente riavvicinandosi, con quest' azione, che giunge al massimo, quando la corda ha ripreso la sua natu= rale lunghezza, produce la somma delle forze vive nei due corpi; le quali pareggiano le pressioni nell' ultimo istante della comunicazione del moto. In tale circostanza essen- dosi annullata la tensione della corda, non può ulteriormente alterare la velocità dei due corpi.

Dopochè due corpi si comunichino il moto col mezzo di una corda elastica, determinare la relazione fra gli allungamenti di essa corda, e le velocità dei due corpi.

XV. Ho dimostrato al numero (V.) che quando i due corpi: M, m camminano colle velocità V, $v = \frac{M.\overline{A-V}}{m} \pm a$, hanno fatto perdita della forza viva

$$\frac{\overline{Mm - M^2}.A^2 \mp 2MmAa + 2M^2A \pm 2Mma.V}{2m} - \frac{\overline{M^2 - Mm}.V^2}{2m} \; (4.)$$

La forza viva perduta dai mentovati corpi deve pareggiare l'azione negativa della corda, detratta la positiva. Ora quando la corda, la cui lunghezza L, e la rigidità naturale h corrispon= dente allo stiramento = 0; ha patito la

la distensione già posta nel numero (XV.) dello Schediasma I. [illegible] Delle corde [illegible] dalla forza $\pm h \cdot \frac{\overline{L+l}}{L} - \frac{\pm hL}{L+l}$, la quale agisce per lo spazio dl uguale al nuovo minimo effettivo allungamento della corda medesima, onde ne risulta l'azione elementare $\frac{\pm h}{L} \cdot \overline{Ldl + ldl} - \pm hL \cdot \frac{dl}{L+l}$. Passo alle integrazione per avere la somma delle reazioni della corda, e trovo

$$\frac{\pm h}{L} \cdot \overline{Ll + \frac{l^2}{2}} - \log.\overline{L+l} \quad (8.)$$

prendendo i logaritmi nella logistica della suttangente $\frac{hL}{2}$ riferiti al parametro L. Non aggiungo costante, perchè la sommatoria si annulla, quando $l = 0$. Siamo dunque pervenuti alla equazione $\frac{h}{2L} \cdot \overline{Ll + \frac{l^2}{2}}$

$$- \log.\overline{L+l} = \frac{\overline{Mm - M^2} \cdot A^2 \mp 2MmAa}{2m}$$

$$\frac{\overline{+2M^2A \pm 2Mma} \cdot V - \overline{M^2 - Mm} \cdot V^2}{2m} \quad (9.)$$

XVI. Per costruire questa formola pongo $\frac{h}{4L} \cdot \overline{2Ll + l^2} - \log.\overline{L+l} = p - q$ colla condizione, che sia

$$\frac{h}{4L} \cdot \overline{2Ll + l^2} = p \quad (10.), \quad \log.\overline{L+l} = q \quad (11.).$$

L'equazione (10.) si riduce alla seguente $L^2 + 2Ll + l^2 = \frac{4L}{h} \cdot \overline{\frac{hL}{4} + p}$. Col

parametro

parametro $\frac{4L}{h}$, all'asse AS (Fig. 26) descrivo la parabola ADeV, in cui all'assissa AB $= \frac{hL}{4}$ corrisponderà l'ordinata BD $= L$; e quindi tirata DT parallela ad AS, sarà qualsivoglia assissa DZ $= p$, e la relativa ordinata Ze $= f$.

Posta la linea AS come assintoto, e BD come primo termine, segue la logistica HDGI della sustangente $\frac{hL}{2}$. Dal punto e tiro eG parallela ad SA, ed indi GK parallela a DB, e rispettivamente ad Ze $= f$ sarà BK $= q$; laonde KC $=$ eG $= p - q$, Ze $= f$.

Ho avvertito, che alla massima variazione della forza media, o sia nel nostro caso al massimo allungamento f della corda corrisponde la massima perdita di forza viva $= \frac{Mm.\overline{A \mp a}^2}{2.\overline{M+m}}$ (s.). Per la qual cosa avremo in tal circostanza
$$\frac{h}{4L}.\overline{2Lf+f^2} - \log.\overline{L+f} = p - q = \frac{Mm.\overline{A \mp a}^2}{2.\overline{M+m}},$$
e ne dedurremo la conseguenza, che quando l'allungamento f è pervenuto alla massima grandezza TV, esser deve $p - q =$ ZS $=$ VI $= \frac{Mm.\overline{A \mp a}^2}{2.\overline{M+m}}$.

La linea KC $=$ Ge è nulla in riguardo

riguardo al punto Z, e va continuamente crescendo, secondochè l'assissa si prende più grande. Finalmente si giungerà ad un' assissa BS fornita della qualità, che tirata l'ordinata SV alla parabola AZQV, e la linea VI parallela ad SA, che tagli la logistica HZGI nel punto N; sia IV = $ZS = \frac{Mm \cdot \overline{A \mp a}^{2}}{2 \cdot \overline{M+m}}$. Detto ciò, sarà TV = f il massimo allungamento, che soffre la corda nella communicazione del moto. Calerà poscia e l'assissa BS, e la forza viva perduta ZS, e l'allungamento della corda TV, e finalmente si annulleranno nel punto B, quando compiuta la communicazione del moto, la corda ha ricuperata la sua naturale lunghezza, e la somma della forza viva dei due corpi si eguaglia alla primitiva...

Non entrandoci nella equazioni (10.), (11.) la massa M, m, e le velocità iniziali A, ±a; egli è chiaro che da queste non dipendono le curve AZQV, HZGI, le quali rimarranno sempre le stesse, purchè non si mutino la lunghezza L della corda, e la sua rigidità naturale h. Hanno bensì luogo le predette massa, e velocità nella determinazione degli allungamenti f della corda, come per esempio del massimo TV, dovendo essere in tale incontro la forza viva perduta,

che

che viene espressa dalla linea intercetta fra le due curve, cioè nadire da

$V.A = \frac{Mm.\overline{A \mp a}^2}{2.\overline{M+m}}$

XVII. Perchè $p - q = \frac{Mm - M^2 . A^2}{2m}$

$\mp \frac{2Mm\,Aa + 2M^2A \pm 2Mma}{2m} . V - \frac{M^2 - Mm}{2m} . V^2$, scopriremo dopo i necessarj computi, ponendo $p - q = z$,

$\overline{V - \frac{MA \mp ma}{M+m}}^2 = \frac{2m}{M^2+Mm} . \frac{1}{2}\frac{Mm.\overline{A \mp a}^2}{M+m} - z$ (n.)

Taglio $KL = \frac{1}{2}\frac{Mm.\overline{A \mp a}^2}{M+m}$, già normale ad essa conduco $LM = \frac{MA \mp ma}{M+m}$, e pel punto M tiro MO parallela ad LK. All'asse MO col parametro $\frac{2m}{M^2+Mm}$ delineo la parabola conica PQMQ'P'; e continuata GK sino in P, sarà $OP = OP' = \frac{m.\overline{A \mp a}}{M+m}$: ma $KO = CN = LM = \frac{MA \mp ma}{M+m}$ velocità media dei corpi M, m; dunque $KP = A$, $KP' = \frac{\overline{M-m}.A \pm 2ma}{M+m}$, che sono le due velocità iniziali, e quale del corpo M. Essendo $KC = ON = z$, scopriremo $LC = MN = \frac{1}{2}\frac{Mm.\overline{A \mp a}^2}{M+m} - z$, e per l'equazione (n.) sarà l'ordinata $NQ = V - \frac{MA \mp ma}{M+m} = V - NC$, e l'ordinata $NQ' = -V + \frac{MA \pm ma}{M+m} = -V + NC$. Queste due equazioni ci somministrano

due

due valori di

$$V = \begin{cases} CN + NQ = CQ \\ CN - NQ = CQ' \end{cases}$$, ai quali corrispon-

de l'allungamento della corda $Zl = l$. Il valore più grande CQ compete ad V, prima che l giunga al massimo; ed il valore più piccolo CQ', quando l cala. Non tralascio di notare, che il primo dei predetti valori di V relativi allo stesso allungamento Za, ed alla stessa forza viva perduta kC cresce sopra la velocità media $CN = \frac{MA \pm ma}{M+m}$ comune ai due corpi, ed il secondo cala per la quantità NQ, conforme al numero (XII.) ho dimostrato generalmente doversi avverare, qualunque sia la indole della forza media. Da essa non dipendono i mentovati valori, i quali si conservano gli stessi rispettivamente alla forza viva perduta kC, purchè non si alterino le masse M, m, e le velocità iniziali $A, \pm a$.

Alla massima grandezza di $l = TV$ compete una sola velocità $SR = \frac{MA \pm ma}{M+m}$. In tale incontro $ZS = Z$, si eguaglia a $kZ = \frac{1}{2}\frac{Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{M+m}$, ed essendo nella formola (12.) la omogenea di comparazione $= 0$, ne risulta $V = \frac{MA \pm ma}{M+m}$.

La linea kZ non può essere salvochè positiva; imperciocchè è sempre positivo il quadrato $\overline{A \mp a}^2$. Non così succede della linea $RM = SR$

=

$= \frac{MA \pm ma}{M+m}$ uguale alla velocità media, la quale riuscirà bensì sempremai positiva, quando siano tali le primitive velocità dei due corpi: ma se la velocità a del corpo m avendo una direzione contraria a quella del corpo M sarà affetta dal segno negativo, la grandezza predetta $\frac{MA - ma}{M+m}$ sarà positiva, nulla, o negativa, secondo che la quantità di moto MA supererà, o uguaglierà la ma, o sarà di essa minore.

Si conserva sempre positiva la linea $OP = \frac{m.\overline{A \mp a}}{M+m}$, supponendosi $A > a$, quando le velocità primitive A, a hanno la stessa direzione. Mettendola al paragone colla $OK = \frac{MA \pm ma}{M+m}$, passerà fra loro uguaglianza, quando sia $mA \mp ma = MA \pm ma$. Da questa formola nascono due equazioni

$$m = \begin{cases} \frac{MA}{A-2a} \\ \frac{MA}{A+2a} \end{cases}$$

adattate ai casi, che i due corpi si muovano per la stessa, o per contraria direzione. Se la direzione è la medesima, essendo $A > 2a$, è di più $m = \frac{MA}{A-2a}$. Che se la direzione è contraria, basta che si verifichi l'equazione $m = \frac{MA}{A+2a}$. Nella ipotesi di $OP = OP' = OK$, sarà la velocità rovinciata del corpo M uguale a

$KP' = o$

KD' = p. Determinando in numero degli stabiliti valori, ne risulterà KD' positiva, e questa linea si cangerà in negativa, qualora si superi la mentovata grandezza.

La figura 26. è accomodata alla circostanza, che le velocità del corpo M si conservino sempre positive. Egli è facile per altro colla scorta delle precedenti riflessioni l'adattare la costruzione agli altri casi, quando cioè è positiva la velocità media, nulla, o negativa la finale; o pure quando la velocità media, e la finale sono amendue negative.

XVIII. Mi faccio ora a descrivere le curve, le cui ascissa = V, e le ordinate = P. Segnata (fig. 27) CA = A velocità iniziale del corpo M, taglio $CN = \frac{MA \pm ma}{M+m}$ eguale alla linea SR della figura 26., che dinota la velocità media del detto corpo, e normale a CA conduco NV eguale a TV della mentovata figura 26. Determino poscia $CD' = \frac{\overline{M-m} \cdot A \pm 2ma}{M+m}$ velocità terminale della massa M. Dongo finalmente NQ = NQ' eguali alla linea similmente denominata nella figura 26., e condotte le ordinate QQ, Q'Q' eguali alla Za della mentovata figura 26., i punti D, Q, V, Q', D' apparterranno alla curva, le cui ascisse CQ pareggiano le velocità del corpo M, e le ordinate QQ i relativi allun=

gamenti

gamenti della corda, la cui lunghezza L, e la rigidità naturale h. Questa curva è una specie di ellisse, i semi-assi della quale ND, NV, siccome quella, ch'è fornita della proprietà, che prendendo l'origine delle ascisse dal centro N, ad ascisse uguali NQ, NQ' una positiva, e l'altra negativa, corrispondono ordinate uguali Qe, Q'e'. La notata proprietà dipende dall' altra da me dimostrata, che le velocità CQ, CQ' relative agli allungamenti pari Qe, Q'e' differiscono dalla velocità media CN per quantità uguali NQ, NQ'.

Supponendosi sempre la velocità iniziale A del corpo M positiva, le nostre curve possono essere di cinque specie, secondochè la velocità media, e finale sono ambo positive, il che si avvera nella figura 26, o pure l'una positiva, e l'altra nulla; una positiva, e l'altra negativa; una nulla, e l' altra negativa, o per ultimo amendue negative.

Si avranno le velocità v del corpo m tirando normale a CP la retta $Pa = \pm a$, e continuata VN sino in c, onde sia $Nc = NC$, conducendo la linea aca', che intersechi nel punto a' la Pa' parallela a Pa. Questa linea $Pa = \pm a$ rappresenterà la velocità iniziale, $Nc = \frac{MA \pm ma}{M+m}$

La

la media, e formando Pa, Nc, $P'a'$ una serie aritmetica, la velocità primitiva si agguaglierà a $P'a' = \frac{2MA \pm 2ma}{M+m}$ $\mp a = \frac{2MA - \overline{M+m}\cdot \pm a}{M+m}$. Prolungando aQ sino in b, $a'Q'$ sino in b', si avranno le velocità del corpo m corrispondenti ai pari allungamenti della corda Qa, $Q'a'$, fra le quali sarà media aritmetica la velocità Nc comune ai due corpi.

Che nello stesso istante competano alla massa M per la velocità $CQ = V$, $Qb = v = \frac{M\cdot\overline{A-V}}{m} \pm a$, si dimostra agevolmente; imperciocché sendo $Pa = Qd = \pm a$, resta $db = \frac{M\cdot\overline{A-V}}{m}$ $= \frac{M}{m}\cdot ad$, e quindi esser dee $m : M$ $:: ad : db$. E veglia il vero DN $= ae = m\cdot\frac{A\mp a}{M+m}$, $Nc = \frac{MA \pm ma}{M+m}$, e perciò $ac = Nc - Na = \frac{MA \pm ma}{M+m} \mp a$ $= M\cdot\frac{A\mp a}{M+m}$; dunque $ae : ac :: ad : db$ $:: m : M$, e conseguentemente $db =$ $\frac{M}{m}\cdot ad = \frac{M\cdot\overline{A-V}}{m}$, e per ultimo $Qb = \frac{M\cdot\overline{A-V}}{m} \pm a$.

Posta la velocità primitiva del corpo m uguale ad a, cioè a dire positiva, sarà la velocità media comune ai due corpi $= \frac{MA + ma}{M+m}$ positiva anch'essa, e maggiore di a.

Poi

Più grande ancora riuscirà la velocità terminale del corpo quadratto $= \frac{2MA - M + m \cdot a}{M + m}$, siccome quella, che colla precedente forma il terzo termine di una serie aritmetica. Con queste velocità si può combinare la finale velocità del corpo M positiva, nulla, e negativa.

Sia negativa la prima velocità del corpo m, e se $MA - ma > 0$, la velocità media $\frac{MA - ma}{M + m}$ comune ai due corpi riuscirà positiva, e tale ne risulterà parimente la velocità finale del corpo m. Anche in questo caso l'ultima velocità del corpo M può essere positiva, nulla, e negativa.

Se $MA = ma$, la velocità media comune ai due corpi diviene $= 0$, ed ai corpi m, M competono le velocità finali a, − A uguali e contrarie alle primitive.

Finalmente supponendo $MA - ma < 0$, diventa negativa la media velocità comune ai due corpi, e la ultima velocità del corpo m può essere negativa, nulla, e positiva. La velocità terminale del corpo M in tale circostanza è necessariamente negativa.

Per soddisfare a tutti i casi notati, ci vorrebbero dieci figure. La figura 20. è adattata alla ipotesi, che le velocità iniziali, media, e

terminali

terminati dai corpi M, m abbiano la stessa direzione, e siano tutte positive.

XIX. A fine di ridurre a compiuto gli allungamenti l della corda, e per esempio il massimo TV (fig. 26), effettuata la costruzione di essa figura colla maggiore esattezza, si renderà nota la misura almeno prossima di esso allungamento. Ci insegna il numero XVI., che in tal circostanza dee valere la formola

$$\frac{h}{4L}\cdot\overline{2Ll+l^2} - \log.\overline{L+l} = \frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{2\cdot\overline{M+m}}$$

Fatta [?] la riflessione, che $\log.\overline{L+l}$ riferito al protonumero L nella logistica della suttangente $\frac{hL}{2}$ si agguaglia, prendendo i logaritmi dalle tavole, ad $\frac{hL}{2}\log.\frac{\overline{L+l}}{L}$ moltiplicato nel logaritmo iperbolico del num.^{ro} 10 $= 2,3025851$, prenderà essa formola il seguente aspetto

$$\frac{h}{4L}\cdot\overline{2Ll+l^2} - 2,3025851\,\frac{hL}{2}\log.\frac{\overline{L+l}}{L} = \frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{2\cdot\overline{M+m}}$$

, ovvero l'equivalente

$$l - 2,3025851\,L\log.\frac{\overline{L+l}}{L} + \frac{l^2}{2L} = \frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{h\cdot\overline{M+m}}$$

. Cominciando da quel valore di TV, che ci somministra la costruzione, colla scorta di alquante [?] prove giungeremo [?] a determinare con fisica esattezza la misura della

linea

linea predetta TV.

Do un esempio di questo calcolo. Per le sperienze riferite nello Schediasma III. ~~[illegible]~~ io mi sono servito di una corda di ottone, la cui rigidità h = libre 2004½. Supponiamo esempigrazia h = libre 2025, M = m = libre 2, ed l = once del piede di Parigi 36 $\frac{17}{24}$ = 36,7083333⅓, e per conseguenza L = 14,3541666 ⅔,

A = a = 1.

Fatto f = 0,0952462½

sarà $\frac{f}{L} = \frac{0,095246}{14,3541667}$ =

0,005191192, ed

$1 + \frac{f}{L} = \frac{L+f}{L}$ = 1,005191192:

Raccolgo dalla tavola

log. 1,006 = 0,0025980

log. 1,005 = 0,0021661

loro differenza = 0,0004319

Troveremo il log. 1,005191192 mediante la seguente analogia

0,001 : 0,0004319 ::

0,000191192 : 0,0000825753929

al quarto termine dalla quale dee aggiungersi

log. 1,005 = 0,0021661, onde si abbia log. 1,005191192 =

0,0022486753929 = log. $\frac{L+f}{L}$.

Si

Si moltiplichi questo logaritmo per
$2,3025851\,L =$
$2,3025851 \cdot 18,3541667$
$= 42,26203068958333$
e ne risulterà
$2,3025851\,L \cdot \log.\frac{L+1}{L} =$
$0,0950337$: ma $f =$
$0,09528$; dunque
$f - 2,3025851\,L \log.\frac{L+1}{L} =$
$0,0002463$.

Osservo essere

$$\frac{f^2}{2L} = \frac{0,0090782784}{36,7083333}$$

$= 0,00024731$; e quindi
$f - 2,3025851\,L \log.\frac{L+1}{L} + \frac{f^2}{2L}$
$= 0,00049374$.

Esprimiamo ora in frazioni decimali il valore di

$$\frac{Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{h \cdot \overline{M+m}} = \frac{1}{2025} =$$

$0,00049380$.

Nel caso del massimo allungamento dovendosi avverar l'equazione, facendo uso de' logaritmi delle tavole $f - 2,3025851\,L \log.\frac{L+1}{L} + \frac{f^2}{2L} = \frac{Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{h \cdot \overline{M+m}}$, ed avendo trovato la prima grandezza $= 0,00049374$, posto $f = 0,09528$, e la seconda $= 0,00049380$, le quali si agguagliano con piena esattezza,

chiaramente

chiaramente si scopre, che il valore di $f = 0,09524$ è rettamente determinato. Ponendo $f = 0,09529$ si troverebbe la prima grandezza alquanto maggiore della seconda; e perciò, supposti esatti i logaritmi delle tavole, il massimo allungamento f dovrebbe star di mezzo fra $0,09524$, e $0,09529$, e prossimamente uguagliarsi ad circa $0,095245 =$ linea $1,14320$, cioè a dire a un di presso a linea $1\frac{1}{7}$.

Ho detto supposti esatti i logaritmi delle tavole; perchè potendo essi sbagliare di $\frac{1}{2}$ nell'ultima cifra, questa differenza nella presente circostanza può recare qualche notabile alterazione. Abbiamo trovato $\log. \frac{L+l}{L} = 0,0022467253929$. Sia questo mancante di $0,0000000005$, onde il vero valore sia $\log. \frac{L+f}{L} =$ $0,0022467253929$: fatta la moltiplicazione per $2,3025851\,L$, troveremo $2,3025851\,L.\log.\frac{L+l}{L} =$ $0,09503564$, e quindi $f - 2,3025851\,L.\log\frac{L+l}{L} =$ $0,00024432$, ed aggiungendo $\frac{f^2}{2L}$

$\frac{l^2}{2d} = 0,00024731,$

$l - 2,3025851 L. \log \frac{L+l}{L} + \frac{l^2}{2d} =$

0,00049763 notabilmente minore

di $\frac{Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{h \cdot M+m} = 0,00049360.$

Tali minuti calcoli richiederebbero la tavola dei logaritmi fornita di maggior numero di cifre.

XX. Ma lasciando da parte questa sottigliezza, molto importa, che si cavi la conseguenza, cioè che la rigidità h = libre 2025, siccome assai grande, rende nello addotto esempio l'allungamento l prossimamente minimo. Dimostreremo nel seguente numero, essere nella ipotesi di l infinitesima

$l - 2,3025851 L \log. \frac{L+l}{L} = \frac{l^2}{2d}.$

Avremo dunque $\frac{l^2}{L} = \frac{Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{h \cdot M+m},$

e perciò ~~conseguenza~~ $l = A \mp a \sqrt{\frac{L Mm}{h \cdot M+m}},$

equazione, che si avvera con esattezza, quando $h = \infty$. Ora vediamo nell' esempio, che abbiamo per le mani, quanto si accosti al vero il valore di l dedotto dalla formola $l = A \mp a \sqrt{\frac{L Mm}{h \cdot M+m}}$. Sostituendo in cambio dalle specie analitiche gli stabiliti valori, scopriremo $l = \sqrt{\frac{18,3541666666666}{2025}}$

$= 0,095204 =$ linee 1,14244.

Supposti giusti i logaritmi abbiamo

determinato

determinato l = linee 1,143420. La differenza menomissima fra le due grandezze di l consiste in linee 0,000972, cioè a un di presso in $\frac{1}{1024}$ di linea, e la loro proporzione si approssima a quella di 1175 : 1176, che colla egualità si confonde fisicamente.

XXI. Trovo minimo l'allungamento l, e dimostro essere nella logaritmica della suttangente $\frac{hL}{2}$ riferita al protonumero L; $\log.\overline{L+l} = \frac{h}{2}\cdot\overline{l - \frac{l^2}{2L}}$.

Avverto, che ricorrendo alle tavole, il detto logaritmo si esprime per $2,3025851\,\frac{hL}{2}\log.\frac{L+l}{L}$; dunque

$$2,3025851\,\frac{hL}{2}\log.\frac{L+l}{L} = \frac{h}{2}\cdot\overline{l - \frac{l^2}{2L}},$$

e per conseguenza

$$l - 2,3025851\,L\log.\frac{L+l}{L} = \frac{l^2}{2L},$$

conforme ho stabilito nel numero precedente.

Torno alla logistica della suttangente $\frac{hL}{2}$ riferita al protonumero L. Sia (fig. 28) HDGI una tale logistica, $AD = L$, $KG = L+l$, $BK = \log.\overline{L+l} = y$ (11.). Segno $KZ = dy = \frac{hL}{2}\cdot\frac{dl}{L+l}$, e tirata l'ordinata ZI; ed inoltre GC parallela a BZ, sarà $CI = dl$. Tagliata $KA = \frac{hL}{2}$, e condotta la retta AGE, toccherà questa la nostra curva nel punto G. Egli è vero,

che

che la intercetta eI fra la tangente e la curva si ragguaglia alla metà della seconda differenza della ordinata KG. Si differenzj l'equazione $dq = \frac{h\alpha}{2}\cdot\frac{dl}{\alpha+l}$, considerata dq in figura di costante, e ne risulterà $\frac{ddl}{\alpha+l} - \frac{dl^2}{\overline{\alpha+l}^2} = 0$, o sia $ddl = \frac{dl^2}{\alpha+l}$, e quindi $eI = \frac{ddl}{2}$ $= \frac{dl^2}{2.\overline{\alpha+l}} = \frac{\overline{CI}^2}{2KG}$. Per la qual cosa

$Ce = CI - \frac{\overline{CI}^2}{2KG}$ :: ma $KG : AK$ ::

$Ce = CI - \frac{\overline{CI}^2}{2KG} : GC = KZ$; dunque

$KZ = \frac{AK}{KG}\cdot\overline{CI - \frac{\overline{CI}^2}{2KG}}$. Pongasi $BK = 0$, onde divenga $KG = \alpha$, e prendendo l'infinitesima $CI = l$, sarà $KZ = \log.\overline{\alpha+l}$. Avremo pertanto sostituendo in vece delle linee i valori analitici, $\frac{h}{2}\cdot\overline{l - \frac{l^2}{2\alpha}} = \log.\overline{\alpha+l}$ nella supposizione di l minimo, come si dovea dimostrare.

XXII. Giacchè generalmente la variazione della elasticità della corda $= \frac{h}{2}\cdot\overline{l + \frac{l^2}{2\alpha}} - \log.\overline{\alpha+l} = p - q = z$ per numeri XVI. e XVII., e nella supposizione di l minimo $\log.\overline{\alpha+l}$ $= \frac{h}{2}\cdot\overline{l - \frac{l^2}{2\alpha}}$, avremo in detta ipotesi $\frac{hl^2}{2\alpha} = z$. A questa equazione si può agevolmente pervenire riflettendo, che pel numero XV. quando la corda

ha

ha patito la Distensione l, è fornita dalla forza $\frac{h}{2}\cdot\left(\frac{L+l}{L}-\frac{L}{L+l}\right)=\frac{h}{2}\cdot\frac{2Ll+l^2}{L^2+Ll}$, la quale, supposto l infinitesimo, pareggia $\frac{hl}{L}$: e perchè in tal circostanza sarà la sua variazione $=\int\frac{hl\,\partial l}{L}=\frac{hl^2}{2L}=z$.

Presa per mano la formola

$$(12.)\ \overline{V-\frac{MA\mp ma}{M+m}}^2=\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{\frac{1}{2}Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m}-z,$$

sostituisco in essa in cambio di z il ritrovato valore, ed ho $\overline{V-\frac{MA\mp ma}{M+m}}^2$

$$=\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{\frac{1}{2}Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m}-\frac{hl^2}{2L},\ \text{o sia}$$

$$\frac{m^2\cdot\overline{A\mp a}^2}{\overline{M+m}^2}-\left(V-\frac{MA\mp ma}{M+m}\right)^2=$$

$$\left(\frac{m^2\cdot\overline{A\mp a}^2}{\overline{M+m}^2}\right)\left(\frac{h\cdot\overline{M+m}}{LMm\cdot\overline{A\mp a}^2}\right)l^2,$$ equazione all'elisse conica, i cui semiassi

$$\frac{m\cdot\overline{A\mp a}}{M+m},\quad \overline{A\mp a}\sqrt{\frac{LMm}{h\cdot\overline{M+m}}}.$$

Sia come al numero XVIII. (fig. 29.) $CP=A$ velocità primitiva del corpo M, $CN=\frac{MA\pm ma}{M+m}$ velocità media comune ai due corpi, e ne risulterà $NP=A-\frac{MA\mp ma}{M+m}=\frac{m\cdot\overline{A\mp a}}{M+m}$, che è il primo semiasse della nostra elisse. Fatta $NP'=NP$, onde si abbia $P'P=\frac{2m\cdot\overline{A\mp a}}{M+m}$, si determinerà

CP'

$$CP' = A - \frac{2am . \overline{A \mp a}}{M+m} = \frac{\overline{M-m} . A \pm 2ma}{M+m}$$

velocità terminale del corpo M. La normale NV si ponga uguale al secondo semiasse $A \mp a \sqrt{\frac{L Mm}{h . \overline{M+m}}}$, che pareggia il massimo allungamento della corda, e co' predetti semiassi NP, NV descrivasi l'elisse conica P'eVeP. Segnando CQ = V; sarà QQ = l nella ipotesi di l minimo, la quale richiede o che sia infinita la rigidità h, o pure infinitesima la velocità relativa $A \mp a$.

Noto, che sendo il massimo allungamento della corda = NV = $A \mp a \sqrt{\frac{L Mm}{h . \overline{M+m}}}$, se si conservano costanti la rigidità, e la lunghezza della corda, e le masse dei corpi, sta esso allungamento come la velocità iniziale relativa $A \mp a$. Che se persistendo il resto invariabile, si muta soltanto la lunghezza L della corda, il predetto allungamento accetta la ragione dimezzata della lunghezza L. Gli altri corollarj, che si possono dedurre, ben volentieri gli lascio all'industria di chi legge.

Determinare la relazione fra gli allungamenti della corda, e gli spazj scorsi dai corpi.

XXIII. Passo alla descrizione della curva, le cui coordinate siano gli allungamenti l della corda, e gli spazj per esempio

S percorsi dal corpo M. Se lo spazio passato in pari tempo dal corpo m si chiami s, avremo, quando i corpi viaggiano per la stessa direzione, $S - s = l$ (13.) e per conseguenza $\partial S - \partial s = \partial l$. Dovechè i corpi camminino per direzione contraria, sarà ∂S, ovvero ∂s negativo, e perciò servirà la medesima formola. Ma $V - v = \frac{M.\overline{A-V}}{m} \pm a$ e $\partial S : \partial s$ $= \frac{M.\overline{A-V} \pm ma}{mV} . \partial S$; dunque

$$\partial S - \partial S . \frac{M.\overline{A-V} \pm ma}{mV} =$$

$$\frac{\overline{M+m}.V - MA \mp ma}{mV} : \partial S = \partial l,$$

e perciò $\partial S = \frac{mV\partial l}{\overline{M+m}.V - MA \mp ma}$ (14.)

E qui non debbo tralasciar di avvertire, che quando i corpi sono dotati di quantità di moto uguali, e contrarie, onde si abbia $MA - ma = 0$, si trova $\partial S = \frac{m\partial l}{M+m}$, e conseguentemente $S = \frac{ml}{M+m}$. E giacchè $S - s = l$, ne risulta $-s = l - \frac{ml}{M+m}$ $= \frac{Ml}{M+m}$. Dar la qual cosa gli spazj corsi nel medesimo tempo dai corpi M, m stanno in ragione inversa dalla massa M, m, o sia in ragione diretta della primitiva velocità

A

A, a, qualunque sia la grandezza dello allungamento f.

Faccio $\frac{mV}{\overline{M+m}.V - MA \mp ma} = \frac{y}{A}$ (15.),

e da questa equazione ne raccolgo dopo i necessarj computi

$y - \frac{Am}{M+m} \cdot V - \frac{AM \mp am}{M+m} = \frac{Am}{M+m} \cdot \frac{\overline{AM \pm am}}{M+m}$ (16.)

Fra gli assintoti (fig. 29) QAR, BAB' descrivo le due opposte iperbole HDZ, H'D'Z' corrispondenti alla formola (16.), ed accade, che ad $AS = V - \frac{AM \mp am}{M+m}$ si riferisca $SZ = y - \frac{Am}{M+m}$: Segnata $SQ = \frac{Am}{M+m}$, ne proviene $QZ = y$, e condotta PQC parallela ad RAQ, che sègli la iperbola HDZ nel punto C, e l'assintoto BB' nel punto N, sarà NC $= \frac{AM \pm am}{M+m}$, e per conseguenza $CQ = V$. Se come nel primo istante della comunicazione del moto $V = A = CP$, onde ne risulti $NP = A - \frac{AM \mp am}{M+m} = \frac{m.\overline{A \mp a}}{M+m}$, si scoprirà $PD = y = \frac{A^2}{A \mp a}$.

Compiuta la communicazione del moto colle leggi dei corpi molli, quando è giunto al massimo l'allungamento della corda, ed i due corpi camminano con pari velocità, ad $V = CN = \frac{MA \pm ma}{M+m}$ corrisponde $y = \begin{cases} AB, \\ AB' \end{cases} = \pm \infty$.

Calando

Calando il valore di V, y diviene negativa, e finalmente la velocità terminale $V = \frac{\overline{M-m}\cdot A \pm 2ma}{M+m} = CD'$ richiede $y = P'D' = -\left(\frac{\overline{M-m}\cdot A^2 \pm 2m\,Aa}{\overline{M+m}\cdot\overline{A \mp a}}\right)$

Avverto, che la figura 29. è adattata alla figura 27, in cui la velocità media, e la finale del corpo M sono amendue positive.

Ora giacchè la figura 27. mi dà la relazione fra V ed f, e la figura 29. quella fra V ed y, è in mia potestà il descrivere la curva delle coordinate f, y, la quale sta espressa nella figura 30. analoga alle figure 27. e 28. All'assissa $f = 0$ si adattano (fig. 30.) le due ordinate $y = PD = \frac{A^2}{A \mp a}$, $y = PD' = -\left(\frac{\overline{M-m}\cdot A^2 \pm 2m\,Aa}{\overline{M+m}\cdot\overline{A \mp a}}\right)$.

Qualora l'allungamento $f = PN$ è giunto al massimo, e pareggia l'ordinata NV della figura 27, abbiamo $y = \pm \infty$. Gli altri valori di f, per esempio PQ, dimandano parimente due ordinate y, una positiva QZ, e l'altra negativa QZ'.

Ripiglio per mano la formola (14.) $dS = \frac{mV\,df}{\overline{M+m}\cdot V - MA \mp ma}$, e perchè per la formola (15.) $\frac{mV}{\overline{M+m}\cdot V - MA \mp ma} = \frac{y}{A}$, mi si presenta $dS = \frac{y\,df}{A}$, ed

integrando

integrando $S = \int \frac{y\,dl}{A}$; ma (fig. 30.) $\int y\,dl = PQ\gamma D$; dunque $S = \frac{PQ\gamma D}{A}$. Quindi io posso determinare il valore di S rispettivamente a $PQ = l$, ed avendo scoperta la relazione fra l, ed V, ovvero v, è altresì nota quella fra S, e la predetta velocità. Mi è concesso non meno di paragonare lo spazio s scorso in pari tempo dal corpo m colle mentovate quantità, essendo $S - s = l$, e perciò $s = S - l = \frac{PQ\gamma D}{A} - PQ$.

XXIV. La figura si suppone sempre positiva la velocità del corpo M, e per conseguenza tale altresì lo spazio da esso scorso. L'aja $\frac{PNB\gamma D}{A}$ si eguaglierà allo spazio positivo passato dal primo istante della comunicazione del moto sino alla velocità media, e l'aja $\frac{NPD'\gamma'B'}{A} = \int \frac{-y \cdot -dl}{A}$ anch'essa positiva pareggerà lo spazio camminato dall'istante, in cui il corpo M è fornito dalla velocità media sino al compimento della comunicazione del moto. Ed perchè lo spazio totale scorso dal corpo M nel tempo della comunicazione del moto si scoprirà uguale all'aja intera $\frac{B\gamma DD'\gamma'B'}{A}$ nel caso presente.

Potendo alla velocità media

positiva

positiva del corpo M corrispondeva la velocità finale positiva, o nulla, o negativa, e dovendo alla velocità media nulla, o negativa riferirsi la velocità terminale negativa; farebbe di uopo moltiplicare le figure fig. 30. secondo le varie esigenze di tali circostanze. Farò soltanto qualche riflessione sopra il caso, in cui sia la velocità media $\frac{MA-ma}{M+m}=0$, il che suppone, che le quantità di moto nei due corpi siano uguali, e contrarie. Conciossiachè qualunque rettangolo ZSA (fig. 19) nella iperbola ZDH si eguagli ad $\frac{Am}{M+m}\cdot\frac{AM-am}{M+m}$; nella nostra supposizione esso rettangolo pareggerà il nulla; laonde divenendo $SZ=0$, l'iperbola ZDH coinciderà coll'assintoto AR. Sarà dunque $y=QS+SZ=QS=\frac{Am}{M+m}$, e perciò $S=\int\frac{y\,dl}{A}=\int\frac{m\,dl}{M+m}=\frac{ml}{M+m}$, conforme altresì ho dimostrato nel numero precedente. Dal principio della comunicazione del moto sino alla velocità media $=0$ il corpo M scorrerà lo spazio (fig. 20) $\frac{m}{M+m}\cdot TV$. Tornerà poscia indietro, e nel fine della comunicazione si troverà in quello stesso sito, che occupava nel primo istante. In riguardo al corpo m

supriremo

scopriremo $s = -\frac{Ml}{M+m}$. Questo spazio negativo crescerà sino alla misura $-\frac{M}{M+m}$. TV corrispondente alla velocità media $= 0$, ed indi scemerà, e diverrà uguale a nulla nell'ultimo istante della comunicazione del moto.

XXV. Torno a considerare l'ipotesi di $f = \frac{1}{\infty}$; nella quale abbiamo $\frac{hf^2}{2L} = z$, e per la formola (12.)

$$V - \frac{MA \mp ma}{M+m} = \sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{1}{2}\frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m} - \frac{hf^2}{2L}},$$

o sia $V = \frac{MA \pm ma}{M+m} + \sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{1}{2}\frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m} - \frac{hf^2}{2L}}$:

ma per la formola (14.)

$$dS = \frac{mVdf}{\overline{M+m}\cdot V - MA \mp ma}\text{; dunque}$$

$$dS = \frac{\overline{MA\pm ma}\cdot mdf}{\overline{M+m}^2\sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{1}{2}\frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m} - \frac{hf^2}{2L}}} + \frac{mdf}{M+m} =$$

$$\frac{mdf}{M+m} \pm \frac{\overline{MA\pm ma}\cdot mdf}{\overline{M+m}\sqrt{m^2\cdot\overline{A\mp a}^2 - \frac{Mm-m^2}{M}\cdot\frac{hf^2}{L}}}$$

$$= \frac{mdf}{M+m} \pm \frac{MA\pm ma}{\overline{M+m}\cdot\overline{A\mp a}}\,\frac{\sqrt{\frac{LMm\cdot\overline{A\mp a}^2}{h\cdot\overline{M+m}}}\;df}{\sqrt{\frac{LMm\cdot\overline{A\mp a}^2}{h\cdot\overline{M+m}} - f^2}},$$

ed integrando, $S = \frac{mf}{M+m} +$

$$\frac{\overline{MA\pm ma}}{\overline{M+m}\cdot\overline{A\mp a}}\cdot\text{Arco Rag.}\ \overline{A\mp a}\sqrt{\frac{LMm}{h\cdot\overline{M+m}}}\ \text{Seno } f \quad (17.)$$

Si

Si costruirà la nostra equazione con eleganza nella seguente maniera. Conduco a squadra le due linee (F. 234) $\rho 7 = 7H = \overline{A \mp a} \sqrt{\frac{L\,Mm}{h \cdot \overline{M+m}}}$ uguale al massimo allungamento, che patisca la corda nella comunicazione del moto; e tagliata $7G$ = alla parte $\frac{m}{M+m}$ della retta $7H$, conduco le due diagonali ρG, ρH. Posta $\rho e = l$, sarà $eD = \frac{ml}{M+m}$. Descrivo poscia col raggio $\rho 7$ il semicircolo $PM7M'P'$, e continuata DC sino in M, M' si resta determinato

Arco rag. $\overline{A \mp a} \sqrt{\frac{Lm}{h \cdot \overline{M+m}}}$ Seno $l = \begin{cases} PM \\ PM7M' \end{cases}$.

Se dunque farò DK uguale alla parte $\frac{MA \pm ma}{\overline{M+m} \cdot \overline{A \mp a}}$ dell'arco PM, DK' uguale ad una parte simile dell'arco $PM7M'$, ne risulterà $\left.\begin{matrix} eK = eD + DK \\ eK' = eD + DK' \end{matrix}\right) = \frac{ml}{M+m}$ $+ \frac{\overline{MA \pm ma}}{\overline{M+m} \cdot \overline{A \mp a}}$. Arco rag. $\overline{A \mp a} \sqrt{\frac{Lm}{h \cdot \overline{M+m}}}$ Seno l $= S$; e quindi a $\rho e = l$ corrisponderanno $\left.\begin{matrix} eK \\ eK' \end{matrix}\right) = S$.

L'allungamento $\rho e = l$ compete due volte alla corda, e quando si allunga, e quando si accorcia. Nel primo caso si determina il relativo spazio S, ponendo $DK = \frac{\overline{MA \pm ma}}{\overline{M+m} \cdot \overline{A \mp a}} \cdot PM$, e nel secondo ponendo $DK' =$

MA

$\frac{MA \pm ma}{M+m \cdot A \mp a} \cdot PM7M'$. quando $l = Q7$

massima sua grandezza, dovrà porsi G7 uguale alla porzione $\frac{MA \pm ma}{M+m \cdot A \mp a}$ del quadrante PM7; e finalmente quando compiuta la comunicazione del moto, la corda ha riacquistata la sua naturale lunghezza, sarà $S = QL$ uguale alla porzione $\frac{MA \pm ma}{M+m \cdot A \mp a}$ del semicircolo PM7M'P'; laonde avremo sempre $2G7 = QL$.

Avverandosi l'equazione $S - s = l$, o pure $S - l = s$, ed essendo $\left.\begin{matrix} QK \\ QK' \end{matrix}\right) = S$, $QC = l$, se ne deduce $\left.\begin{matrix} CK \\ CK' \end{matrix}\right) = s$. Gli spazj QK, CK si scorrono nel tempo stesso dai corpi M, m, e ciò similmente accade in riguardo agli spazj QK', CK'. Nell'istante del massimo allungamento $l = A \mp a\sqrt{\frac{LMm}{h \cdot M+m}} = Q7 = 7H$ si scoprirà $s = H7 = G7 - GH$. Ora perchè 7G si agguaglia alla parte $\frac{m}{M+m}$ della linea 7H, ne risulta GH uguale alla porzione $\frac{M}{M+m}$ della mentovata linea 7H. Avremo pertanto H7 uguale alla parte $\frac{MA \pm ma}{M+m \cdot A \mp a}$ del quadrante PM7 meno la parte $\frac{M}{M+m}$ del raggio $Q7 = 7H$. Finita che sia la comunicazione del moto, ambo i corpi avranno passato lo spazio $QL = \frac{MA \pm ma}{M+m \cdot A \mp a} \cdot PM7M'P'$, il quale

si

si annullerà, qualora la quantità del moto nei due corpi siano eguali, o contrarie.

XXVI. La figura 31 è accomodata all'ipotesi, che le velocità dei due corpi siano sempre positive. Se da principio il corpo m si muove colla velocità +a, la curva QKIK'L farà angolo nel punto Q colla retta QH, la quale verrà toccata nello stesso punto dalla mentovata curva, quando sia a = 0. Dopo che la velocità iniziale del corpo m si eguagli a −a, e sia MA > ma, la curva QKI starà almeno in parte dentro l'angolo HQG. Vediamo quando essa passi pel punto H, e tocchi in esso la retta IH. Dovrà essere in tal circostanza GH = GI, e per conseguenza

$$\frac{M \cdot QI}{M+m} = \frac{MA-ma}{M+m \cdot A+a} \cdot \text{Quad. Rag. } QI = \frac{MA-ma}{M+m \cdot A+a} \cdot \frac{355}{226} \cdot QI,$$

esprimendo per 226 : 355 la proporzione fra il raggio, e il quadrante. Ridotto il computo scopriremo $a = \frac{129\,MA}{226\,M + 355\,m}$;

e quindi se il corpo m sarà fornito dalla velocità iniziale $-a = -\frac{129\,MA}{226\,M+355\,m}$, la curva QKI verrà contenuta dentro l'angolo HQG, e toccherà la retta IH nel punto H. Che se $-a < -\frac{129\,MA}{226\,M+355\,m}$, la curva QKI taglierà la linea QH in un punto medio fra Q ed H, e toccherà la IH al di sopra del punto H. Il punto

dal

del contatto sarà inferiore al punto H, e superiore al punto G; quando sia $-a > -\frac{129\,MA}{226\,M + 355\,m}$, salva la condizione di $MA > ma$. Sia $MA = ma$, e la curva QKI coinciderà colla retta QG, e la curva IKL colla retta GQ. Gli spazj passati nello stesso tempo dai corpi M, m saranno $QD = \frac{ml}{M+m}$, $CD = -\frac{Ml}{M+m}$, i quali si eguaglieranno al nulla e nel principio, e nel fine della comunicazione del moto. Finalmente supponendo $MA < ma$, la curva QKI caderà al di sotto della linea QG. Ecco la condizione, che si richiede, acciocchè da essa venga toccata la linea ZI, nel punto Z. Accaderà ciò, qualora sia $GI = GZ$, cioè a dire $\sqrt{\frac{MA - ma}{M+m \cdot Aa}} \cdot \frac{355\,QZ}{226} = -\frac{m}{M+m} \cdot QZ$, onde dopo i necessarj computi si troverà $a = \sqrt{\frac{355\,M + 226\,m \cdot A}{129\,m}}$.

Se il corpo m camminerà colla velocità iniziale $-a = -\sqrt{\frac{355\,M - 226\,m \cdot A}{129\,m}}$, la curva QKI starà rinchiusa dentro l'angolo GQZ, e toccherà la retta ZI nel punto Z. Il punto del contatto poi sarà superiore, o inferiore al punto Z, secondochè la velocità negativa primordiale del corpo m si stabilirà minore, o maggiore della quantità $-\sqrt{\frac{355\,M - 226\,m \cdot A}{129\,m}}$.

XXVII. Nella supposizione di $l = \frac{1}{\infty}$

si

si costruisca agevolmente la curva delle coordinate S, V senza ricorrere alla quadratura; imperciocchè (fig. 27 e 28.) assegnato a Aa = l un determinato valore fra quelli, che gli posson competere, le predette figure mi insegnano la grandezza di V, e di S, che sono le coordinate della curva, che dee descriversi. Ne nascerà pertanto (fig. 30.) la curva GHN; le cui ascisse ZI dinoteranno gli spazj S scorsi dal corpo M, e le ordinate IH le corrispondenti velocità V. Poichè ZI si agguagli allo spazio S relativo al massimo allungamento della corda, sarà la competente velocità $V = \frac{MA \pm ma}{M+m}$, che si accomunerà in tale istante anche al corpo m. La figura 30 è adattata alla circostanza, che la velocità media IH comune ai due corpi, e la velocità terminale del corpo M, cioè $LN = \frac{\overline{M-m} \cdot A \pm 2ma}{M+m}$ siano amendue positive.

Similmente si descriverà (fig. 30.) la curva ghn, dalla cui ascissa fi = s sono rappresentati gli spazj passati dal corpo m, e dalle ordinate ih = v la velocità rispettiva dello stesso corpo. Accomodata alla predetta curva l'ordinata $ih = \frac{AM \pm am}{M+m}$ esprimente la velocità media comune ad ambo i corpi, sarà fi lo spazio relativo

scorso

scorso del corpo m. La figura suppone positiva la velocità primitiva $fg = a$ del corpo m, il che richiede, che siano altresì tale la media ik $= \frac{AM + am}{M+m}$, e la finale $hn =$ $\frac{2MA - \overline{M+m} \cdot a}{M+m}$.

Trovare il tempo, in cui segue la comunicazione del moto col mezzo di una corda elastica.

XXVIII. Avendo insegnato generalmente a determinare le curve delle coordinate S, V; s, v, costruiremo agevolmente mediante l'iperbola conica fra gli assintoti le curve delle coordinate $S, \frac{1}{V}$; $s, \frac{1}{v}$, le cui aje $\int \frac{dS}{V}$, $\int \frac{ds}{v}$. Sia t il tempo, in cui si passano gli spazj corrispondenti S, s dai corpi M, m; e conforme è noto avremo $t = \int \frac{dS}{V} = \int \frac{ds}{v} =$ alle aje delle curve aventi per coordinate $S, \frac{1}{V}$; $s, \frac{1}{v}$.

XXIX. Ho dimostrato al numero (XIII.), che aggiunta la velocità b alle due primitive A, ±a, non si muta il tempo della comunicazione del moto fra i corpi M, m. Vogliasi $M \cdot \overline{A+b} + m \cdot \overline{\pm a + b} = 0$, e si troverà $b = -\frac{MA \pm ma}{M+m}$. Assegnato dunque a b un tal valore, i corpi si sfuggiranno con quantità di moto eguali,

a contraria, nel qual incontro ho fatto vedere, essere $S = \frac{ml}{M+m}$, $s = -\frac{Ml}{M+m}$. All'allungamento l corrisponde nella corda la forza $= \frac{1}{2}h \cdot \frac{L+l}{L} - \frac{L}{L+l}$. Sintantochè l'allungamento l è minimo, abbiamo la detta forza $= \frac{hl}{L}$ proporzionale al detto allungamento, o sia agli spazj S, s; e perciò attribuito ad l qualunque valore finchè infinitesimo, la comunicazione del moto segue costantemente nel tempo stesso. Ma quando l'allungamento l è finito, egli è di uopo provare, che meno cresca la forza di quello cresca l'allungamento. Sia questo $= nl$, esprimendo n un numero maggiore dell'unità. Se la forza crescesse come l'allungamento, dovrebbe essa uguagliarsi ad $\frac{1}{2}h \cdot \frac{2nLl+nl^2}{L^2+Ll}$; e giacchè realmente si uguaglia ad $\frac{1}{2}h \cdot \frac{2nLl+n^2l^2}{L^2+nLl}$, dovrà essere $\frac{2nLl+n^2l^2}{L^2+nLl} < \frac{2nLl+nl^2}{L^2+Ll}$ e dividendo per $\frac{nl}{L}$, $\frac{2L+nl}{L+nl} < \frac{2L+l}{L+l}$. Levo le divisioni, e trovo $2L^2+2Ll+nLl+nl^2 < 2L^2+Ll+2nLl+nl^2$, e sottraendo da ambedue le parti quantità uguali $Ll < nLl$, o sia $1 < n$, conseguenza vera. Quindi crescendo meno la forza di

quello

quello, cresca l'allungamento fatto della corda, a cui sono proporzionali gli spazj scorsi dai corpi, si aumenterà il tempo della comunicazione del moto, secondochè la corda soffrirà maggiori distensioni. Quando dunque è minima la velocità relativa $A \mp a$, la comunicazione del moto mediante una corda elastica si effettua nel tempo più breve.

XXX. Mi fermo sull'ipotesi di $l = \frac{1}{\infty}$. Ho trovato di sopra al numero (XXV.)

$$dS = \frac{\overline{MA \pm ma} \cdot m\,dl}{\overline{M+m}^2 \sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm} \cdot \frac{\frac{1}{2} Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{M+m} - \frac{h l^2}{2L}}}$$

$$+ \frac{m\,dl}{M+m},$$

$$V = \frac{MA \pm ma}{M+m} + \sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm} \cdot \frac{\frac{1}{2} Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{M+m} - \frac{h l^2}{2L}}.$$

Avremo pertanto $dt = \frac{dS}{V} =$

$$\frac{\dfrac{\overline{MA \pm ma} \cdot m\,dl}{\overline{M+m}^2 \sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm} \cdot \frac{\frac{1}{2} Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{M+m} - \frac{h l^2}{2L}}} + \dfrac{m\,dl}{M+m}}{\dfrac{MA \pm ma}{M+m} + \sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm} \cdot \frac{\frac{1}{2} Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{M+m} - \frac{h l^2}{2L}}},$$

ed effettuando la indicata divisione scopriremo

$$dt = \frac{m\,dl}{\overline{M+m} \sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm} \cdot \frac{\frac{1}{2} Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{M+m} - \frac{h l^2}{2L}}},$$

la qual formola si riduce alla seguente

$$dt = \frac{1}{A \mp a} \cdot \frac{\sqrt{\frac{L Mm}{h \cdot M+m} \cdot \overline{A \mp a}^2}\; dl}{\sqrt{\frac{L Mm}{h \cdot M+m} \cdot \overline{A \mp a}^2 - l^2}},$$

ed

ed integrando

$$t = \frac{1}{A \mp a} \text{Arco tang. } A \mp a \sqrt{\frac{LMm}{h \cdot M \mp m}} \text{ Seno } l \quad (146.)$$

Descritto (Fig. 38.) col raggio

$$QZ = A \mp a \sqrt{\frac{LMm}{h \cdot M \mp m}}$$ massima distensione, che soffre la corda nella comunicazione del moto, il semicircolo $pMZM'p'$, conforme ho fatto nel numero (XXV.), segnata $Qe = l$ e pel punto e condotta MeM' normale a QZ, sarà $\frac{pM}{A \mp a}$, ovvero $\frac{pMZM'}{A \mp a}$ il tempo corrispondente, il primo mentre la corda si allunga, ed il secondo mentre si va restituendo alla sua naturale lunghezza. Il quadrante $\frac{pMZ}{A \mp a}$ pareggia il tempo, in cui segue il massimo allungamento QZ, e si compie la comunicazione del moto colla legge dei corpi molli; e dal semicircolo $\frac{pMZM'p'}{A \mp a}$ vien dinotato il tempo, nel quale si effettua la comunicazione del moto colla legge dei corpi elastici, terminata la quale, ha ricuperata la corda la sua naturale lunghezza.

XXXI. Nel citato numero (XXV.) ho descritta la curva $QKIK'L$, che rispettivamente all' ascissa $Qe = l$ mi dà le ordinate $\left.\begin{matrix} eK \\ eK' \end{matrix}\right) = S; \left.\begin{matrix} cK \\ cK' \end{matrix}\right) = s.$

Gli spazj $eK = S$, $cK = s$ passati dai corpi M, m sono relativi alla distensione $Qe = l$, mentre la corda

si

si allunga; e gli spazj $QK' = s'$, $CK' = s$ scorsi dai detti corpi sono relativi alle distensioni $QC = f$, mentre la corda si accorcia. Quindi la prima coppia di spazj sarà scorsa nel tempo $\frac{QM}{A \mp a}$, e la seconda nel tempo $\frac{QM, \mp M'}{A \mp a}$. La figura 3ª è accomodata al caso, in cui le velocità dei corpi M, m sono sempre positive.

Quando o l'uno, o l'altro corpo, ovvero amendue cangiano direzione, può nascere dello equivoco nella giusta estimazione degli spazj passati. Per insegnare a schivarlo, farò qualche considerazione sopra quel caso, in cui i due corpi si sfuggono con quantità di moto eguali, e contrarie. In tal circostanza la curva $QKDK'd$ coincide colla retta QG, ed all'allungamento $QC = f$ corrisponde lo spazio $QD = \frac{mf}{M+m}$, per cui ha viaggiato il corpo M, e lo spazio $CD = -\frac{Mf}{M+m}$, per cui il corpo m si è mosso. Nel tempo $\frac{QM}{A+a}$ i mentovati corpi avranno soltanto passati gli spazj QD, CD per direzioni contrarie. A cagione di ben capire, come nel tempo $\frac{QM \mp M'}{A+a}$ i nostri corpi si siano mossi per

gli

gli spazj AD, CD, si tirino DO parallela a AZ, DN parallela a AH. Nel detto tempo il corpo M ha camminato per la direzione AD lo spazio ZG, ed è tornato indietro per lo spazio GO; laonde s'agguaglia ad AD il residuo spazio scorso per la direzione AD. Non altrimenti nello stesso tempo $\frac{DMZM'}{A+a}$ il corpo m ha passato per la direzione CD lo spazio HG, ed è ritornato indietro per uno spazio = GN; e perciò rimane lo spazio CD scorso per la direzione CD.

XXXII. Molti corollarj si possono dedurre dalla formola (14.), e dalla costruzione della medesima.

1. Il tempo, in cui segue la comunicazione del moto o colla legge dei corpi molli, o con quella degli elastici nella ipotesi di $f=\frac{1}{\infty}$ sarà minimo, quando si supponga infinita la rigidità h, e finita la velocità relativa $A\mp a$; imperocchè siccome esso tempo espresso o dal quadrante DMZ, o dal semicircolo DMZM'D' diviso per la quantità finita $A\mp a$, i quali due archi sono amendue minimi, essendoli descritti col raggio infinitesimo $A\mp a\sqrt{\frac{LMm}{h\cdot Mm}}$,

2.

2°. Che se il valore infinitesimo della velocità relativa $A \mp a$ facesse divenir tale anche l'allungamento l, e la rigidità h stasse dentro i termini del finito, sarà finita la misura del predetto tempo; perchè

$$\frac{1}{A \mp a} \cdot \text{Quadr. Rag. } A \mp a \sqrt{\frac{L\,Mm}{h.\,M+m}} = \sqrt{\frac{L\,Mm}{h.\,M+m}} \cdot \text{Quadr. Rag. ecc.}$$

$$\frac{1}{A \mp a} \cdot \text{Semic. Rag. } A \mp a \sqrt{\frac{L\,Mm}{h.\,M+m}} = \sqrt{\frac{L\,Mm}{h.\,M+m}} \cdot \text{Semic. Rag.}$$

e sono ambedue quantità finite.

3. Quindi apertamente si scopre, che nel tempo della comunicazione del moto o colla legge dei corpi molli, o con quella degli elastici non hanno parte alcuna nè le velocità assolute A, $\mp a$ dei due corpi, nè la velocità relativa $A \mp a$, purchè questa non oltrepassi i confini della quantità minima, quando la rigidità h è finita; rendendosi necessaria una tal condizione, acciocchè l'allungamento l sia infinitesimo. Per la qual cosa se persista invariata la quantità $\sqrt{\frac{L\,Mm}{h.\,M+m}}$, e della velocità primitiva si mutino i valori, salva la circostanza, che sia $A > a$, qualora i due corpi si muovono per la medesima direzione, e che sia minima la velocità relativa

$A \mp a$

$A \mp a$; non si altererà punto il tempo della comunicazione del moto colli una, o colli altra legge. Il massimo allungamento della corda = $A \mp a \sqrt{\frac{L\,Mm}{h \cdot M + m}}$ si effettuerà in tempo costante, qualunque sia la grandezza medesima di $A \mp a$, ed in pari tempo la corda ritornerà alla primiera sua lunghezza.

4. Nella mentovata ipotesi di $A \mp a = \frac{1}{cs}$ il tempo della partecipazione del moto colli una, o colli altra legge starà sempre in ragione di $\sqrt{\frac{L\,Mm}{h \cdot M + m}}$.

5. Se le masse non si mutano, o pure si mantiene costante la quantità $\frac{Mm}{M + m}$, sarà il detto tempo in ragione diretta dimezzata della lunghezza L della corda, ed inversa parimente dimezzata della rigidità h della corda medesima; e quando la lunghezza, e la rigidità si alterassero proporzionalmente, il nominato tempo si conserverebbe costante.

6. La corda non si cangi, o pure sia dato il valore di $\frac{L}{h}$, ed il nostro tempo accetterà la proporzione di $\sqrt{\frac{Mm}{M + m}}$: Che se fosse $\frac{Mm}{M + m} = q$ quantità data,

il

il tempo della communicazione del moto non varierebbe. Dalla premessa equazione ne nasce la formola $m = \frac{Ma}{M-e}$, la quale mi insegna, che M non può essere minore di e, nè ad essa quantità uguale; perchè la massa m diventerebbe o negativa, o infinita. Assegnata ad M una grandezza maggiore di e, la sovrapposta formola determina il relativo valore di m. Sia per esempio $M = 6$, $m = 3$, onde ne risulti $\frac{Mm}{M+m} = \frac{18}{9} = 2 = e$, e stabilita $M = 4$, troveremo $m = \frac{Ma}{M-e}$ $= \frac{8}{2} = 4$. Se dunque si farà $M = m$ $= 4$, si effettuerà la communicazione del moto in quel tempo stesso, in cui succedeva, quando era $M = 6$, $m = 3$, quantunque si alteri ad arbitrio dentro i limiti della quantità minima la velocità relativa $A \mp a$ nella supposizione di h finita, purchè rimanga invariato il valore di $\frac{dq}{h}$.

XXXIII. Quando la corda primieramente si allunga, indi ritorna alla pristina sua lunghezza, fa una vibrazione, la quale si può paragonare con quella di un pendolo a cicloide. Il tempo di una tal vibrazione si esprime generalmente pel semicircolo del raggio = 1, moltiplicato nella radice della lunghezza del pendolo mentovato. Un pendolo lungo once $36\frac{17}{24}$ dal piede di

Parigi

Parigi fa una vibrazione per secondo; dunque istituita la analogia

$t : \sqrt{\frac{L \cdot Mm}{h \cdot \overline{M+m}}} \cdot$ Semic. Rag. 1 ::

$1 : \sqrt{36\frac{17}{24}}$. Semic. Rag. 1, scopriamo $t = \sqrt{\frac{LMm}{h \cdot \overline{M+m} \cdot 36\frac{17}{24}}}$, e questo valore del tempo della comunicazione del moto fra i corpi M, m colla legge dei corpi elastici fatta col mezzo della corda, la cui lunghezza L, e la rigidità h, sarà espresso in secondi.

Il tempo della comunicazione del moto colla legge dei corpi molli si eguaglierà alla metà del precedente, onde si abbia

$$t = \sqrt{\frac{LMm}{4h \cdot \overline{M+m} \cdot 36\frac{17}{24}}}$$

Supponiamo esempigrazia come al numero (XIX.) $2L = 36\frac{17}{24}$, $M = m = 2$, $h = 2025$ e purchè sia nessuna la velocità relativa $A \mp a$ rispettivamente alla rigidità $h = 2025$, si troverà il tempo della comunicazione del moto giusta il canone dei corpi elastici $= \sqrt{\frac{1}{4050}} = \frac{1}{63,63961} = 0,0157135$ di secondo, e giusta il canone dei corpi molli $= \frac{1}{127,27922} = 0,0078567$.
Saranno questi i tempi più piccoli, nei quali mediante la corda possa seguire la comunicazione del moto

fra

fra i corpi $M = m = 2$; imperciocchè accrescendo la velocità relativa $A \mp a$, dimodochè non sia più minima in riguardo ad h, i detti tempi acquisteranno un valore più grande.

XXXIV. Una corda elastica si leghi da un canto ad un chiodo immobile, e dall'altro al corpo m, ed una forza infinitesima applicata al detto corpo abbia cagionato nella corda un minimo allungamento, e si sia formato equilibrio. Lasciato in libertà il corpo, la corda colla sua azione gli imprimerà forza viva, e lo accelererà sintantochè sia ritornata alla sua naturale lunghezza: si cerca il tempo impiegato in questa comunicazione di moto.

La soluzione di questo problema non è salvochè un corollario delle cose precedentemente spiegate. Il chiodo rappresenta un corpo di massa infinita M. Suppongasi, che i due corpi M, m sfuggendosi da prima con quantità di moto uguali, e contrarie, si siano ridotti in quiete nel momento, in cui si è terminata la comunicazione del moto colle leggi dei corpi molli. In tale istante la corda, col mezzo della quale si partecipa il moto, soffre lo allungamento $A \mp a \sqrt{\frac{L Mm}{h \cdot M \mp m}}$ =

$= a\sqrt{\frac{Lm}{h}}$; a cagione che la velocità A è riscuivabile rispettivamente alla a, la massa m rispettivamente alla M, e nel tempo $t = \sqrt{\frac{Lm}{4h \cdot 30\frac{17}{24}}}$ ricupera la sua ordinaria lunghezza, ed imprime al corpo m la velocità = a. Ora se la forza applicata al corpo m ha cagionato nella corda, la cui lunghezza L, e la rigidità h, che si suppone legata al chiodo immobile, un par allungamento $a\sqrt{\frac{Lm}{h}}$, posta in libertà il corpo m, acquisterà la medesima velocità nel tempo stesso $= \sqrt{\frac{Lm}{4h \cdot 30\frac{12}{24}}}$, essendo le circostanze affatto simili in un caso, e nell'altro, ed egualmente immobile il chiodo, ed il corpo infinito M.

XXXV. La forza media è riscontrata nei corpi, che si comunicano il movimento. Sono essi corpi una specie di elastro, la cui lunghezza si eguaglia a quella dei corpi stessi secondo la direzione del moto. La rigidità dipende e dalla materia componente i corpi, e dalle loro sezioni normali alla direzione del movimento. Per la qual cosa se le sezioni variano, è parimente diversa la rigidità degli

strati

strati. Nel tempo della comunicazione del moto colla legge dei corpi molli lo elastro si costipa, e se i corpi sono molli, la costipazione non può restituirsi, e quando giunga al massimo, è terminata la comunicazione del movimento. Ma quando i corpi sono elastici, lo elastro si dilata, e riacquistata da essi la loro consueta figura, è finita la comunicazione del moto colla legge dei corpi elastici.

Se data la figura dei corpi, si rendesse nota la natura della forza media, si potrebbe determinare il tempo della comunicazione del moto colla una, o colla altra legge. La forza media fra due cilindri della stessa materia, e forniti di basi uguali, che urtando direttamente una base colla altra, si comunicano il moto, è analoga a quella di una corda, col mezzo della quale si partecipa il movimento. Siano L, l le lunghezze dei cilindri, b la base, ed h la rigidità della materia relativa alla base stessa. La lunghezza dello elastro pareggia $L+l$, e dalla compressione di esso nasce la forza media. Suppongasi la velocità relativa $A \mp a = \frac{1}{\omega}$,

e

e seguendo la minima compressione dei cilindri la stessa legge della minima distensione della corda, si avrà per la cosa dimostrata il tempo della communicazione del moto giusta il canone dei corpi elastici $t=\sqrt{\frac{\overline{L+l}\cdot Mm}{h\cdot\overline{M+m}\cdot 36\frac{17}{24}}}$.

Si chiami g la gravità specifica della materia componente i cilindri, ed essendo $M=Lbg$, $m=lbg$, scopriremo $t=\sqrt{\frac{\overline{L+l}\cdot Llb^2g^2}{h\cdot\overline{L+l}\cdot bg\cdot 36\frac{17}{24}}}=\sqrt{\frac{Llbg}{h\cdot 36\frac{17}{24}}}$.

Il tempo dunque della communicazione del moto fra i nostri cilindri, la cui velocità relativa sia minima, è proporzionale alla radice del prodotto della lunghezza dei cilindri, della base, e della gravità specifica, diviso per la rigidità della materia relativa alla base mentovata.

XXXVI. Ma se la velocità relativa sia finita, la communicazione del moto seguirà in tempo più piccolo di quello, che or ora ho determinato. La dimostrazione dipende dal far vedere, che in riguardo ai cilindri più crescono le forze di quello crescano le compressioni. Sia L la lunghezza di un cilindro, h la rigidità naturale corrispondente alla forza premente $=0$, e supposto che la forza f stia in equilibrio colla

elasticità

elasticità di esso corpo, quando esso ha sofferto la compressione x, avremo pel numero XVII. dello Schediasma I. [illegible] $dx = \frac{\overline{L-x} \cdot df}{\frac{hL}{L-x}+f}$. L'integrazione di questa formola effettuata col metodo spiegato nel numero XIII. del nominato Schediasma mi dà $\frac{1}{2}h \cdot \overline{-\left(\frac{L-x}{L}\right)+\frac{L}{L-x}} = f$.

La compressione cresca in ragione di $1 : n$, esprimendo n un numero maggiore della unità. Se la forza si aumentasse nella stessa proporzione, dovrebbe uguagliarsi ad $\frac{1}{2}h \cdot \overline{-\left(\frac{nL-nx}{L}\right)+\frac{nL}{L-x}}$: ma in fatti si uguaglia ad $\frac{1}{2}h \cdot \overline{-\left(\frac{L-nx}{L}\right)+\frac{L}{L-nx}}$;

dunque egli è di uopo provare
$-\left(\frac{L-nx}{L}\right)+\frac{L}{L-nx} > -\left(\frac{nL-nx}{L}\right)+\frac{nL}{L-x}$,
o sia $\frac{2Lnx-n^2x^2}{L^2-Lnx} > \frac{2Lnx-nx^2}{L^2-Lx}$,
e fatta la divisione per $\frac{nx}{L}$,
$\frac{2L-nx}{L-nx} > \frac{2L-x}{L-x}$. Levate le divisioni, e trova $2L^2-Lnx-2Lx+nx^2 > 2L^2-2Lnx-Lx+nx^2$, e cancellando la quantità comuni da entrambe le parti $-Lx > -Lnx$,

e

e dividendo per $Lx\,y - 2D = ng$, o pure nD ..., conseguenza vera. Se le forze seguitassero la ragione delle compressioni prime, non si altererebbe il tempo della comunicazione del moto: ma conciossiaché le forze divengano proporzionatamente maggiori delle compressioni, il tempo decresce, qualora si aumenti la velocità relativa A [illegible]

XXXVII. Ella è curiosa la proprietà, che quando si comunica il moto fra due cilindri mediante una corda elastica, il minimo tempo impiegato corrisponde alla minima velocità relativa; ed al contrario quando la comunicazione del moto si fa col mezzo delli cilindri, alla minima velocità relativa si riferisca il massimo tempo. La ragione dipende da ciò, che stirando una corda, cresce la sua lunghezza, e cala la sua grossezza; le quali due circostanze sono amendue favorevoli a più facilmente allungarla. Ma comprimendo un cilindro, cala la sua lunghezza, e cresce la sua grossezza; rendendo per questi due titoli si rende sempre più difficile l'ulterior compressione. Quindi nella corda la distensione cresce in maggior proporzione della forza, che con essa si equilibra; e tutto all'opposto nella compressione dei cilindri succede, paragonandola

unendola colla forza, che fa con essa equilibrio. Per i moti dei due contrarj motori alla minima velocità relativa ci corrisponde in un caso il minimo tempo, e nell'altro il massimo. Quello, che accade nei cilindri, si osserva altresì in tutti gli altri corpi di figura diversa, che urtandosi si comunicano il movimento.

XXXVIII. Colla teoria dei cilindri, o dei parallelepipedi, nei quali è nota la relazione fra le compressioni, e le forze comprimenti, si può determinare il tempo, in cui urtandosi con minima velocità relativa, si comunicano il moto altri corpi. Diamone un esempio.

Sia (fig. 34) ABC un triangolo isoscele, ed AZ il suo asse. Scelto ad arbitrio qualsivoglia punto M, tiro per esso DMe parallela a BC, e sopra la figura eDBC formo il prisma DK, la cui altezza DI; il quale resista perpendicolarmente sopra il piano ABC, e mi propongo di determinare la legge fra le forze comprimenti, e le compressioni per la direzione MZ. Pongo AM = k, De = c, DI = a, MZ = d, MN = z, e fatta NO = dz, e tirate PNG, QOZ parallele a De, m'immagino condotti per esse linee i piani PS, QT paralleli al piano DH. Sia h la rigidità del nostro corpo rispettivamente

rispondente al piano DH, e giacché le rigidità dei due piani egualmente alti DH, ΔS seguitano la proporzione delle loro basi DG, ΔG, e queste stanno come AM : AN, avremo
$AM = k : AN = k+z :: h : \frac{h \cdot \overline{k+z}}{k}$,
ed il quarto termine esprimerà la rigidità del piano ΔS, o sia dello strato ΔT, che si può considerare parallelepipedo.

Si comprima esso strato per lo spazietto dx, e chiamata f la forza comprimente, avremo giusto a quanto ho stabilito al numero XXXVI. in riguardo ai cilindri, o ai parallelepipedi $\frac{h \cdot \overline{k+z}}{2k} \cdot \overline{\frac{dz}{dz-dx} - \frac{dz+dx}{dz}} = f$, o pure $\frac{h \cdot \overline{k+z}}{2k} \cdot \frac{\overline{2dz\,dx - dx^2}}{dz^2 - dz\,dx} = f$.

Supposta dx minima in relazione a dz, scriveremo $\frac{h \cdot \overline{k+z}}{2k} \cdot \frac{2dx}{dz} = f$, e conseguentemente $\frac{h\,dx}{fk} = \frac{dz}{k+z}$.

Il valore di f ha da essere costante in qualunque strato, se gli strati compressi hanno da equilibrarsi fra loro; e quindi assunta f in qualità di costante, passo all'integrazione $\frac{hx}{fk} = \log. \overline{k+z}$, prendendo i logaritmi nella logistica della suttangente $= 1$; e riferendoli al protonumero k. Non si aggiunga costante; perché posta

posto $z = 0$; si trova come dovevasi $\frac{hx}{fk} = \log. k = 0$. Imperciocchè per la qual cosa $f = \frac{hx}{k.\log.\overline{k+z}}$, e quando $z = d$, $f = \frac{hx}{k.\log\overline{k+d}}$, valore della forza atta ad equilibrarsi colla massima compressione x.

XXXIX. Si muovano due corpi uguali Dk, ognuno fornito della massa M, colla massima velocità relativa $A \mp a$; e siano collocati dentro un vascello, il quale si muova colla velocità $-\frac{A \mp a}{2}$, dimodochè in riguardo allo spazio immobile i corpi stessi si colpiscano con pari celerità $= \frac{A \mp a}{2}$. Abbiamo già veduto al numero XIII.; che il moto traslato non altera punto il tempo della comunicazione del moto. Quando ciascuno dei due corpi eguali si comprimerà per la misura x, scorrerà un pari spazio rispettivamente allo spazio immobile.

Preso a considerare il moto di un solo corpo, avremo la formola $\frac{hx\,dx}{k.\log.\overline{k+d}} = -MV\,dV$, ed integrando, $\frac{hx^2}{k.\log.\overline{k+d}} = M.\frac{\overline{A \mp a}^2}{4} - V^2$. Ho aggiunta la costante $M.\frac{\overline{A \mp a}^2}{4}$; perchè nel principio della comunicazione del

moto

moto, quando $x = a$; il corpo M camminerà colla velocità $V = \frac{A \mp a}{2}$.

Dalla scoperta formola si deduce

$$\sqrt{\frac{\overline{A \mp a}^2}{4} - \frac{hx^2}{Mk \cdot \log. \overline{k+l}}} = V = \frac{dx}{dt}, \text{ e}$$

conseguentemente $\sqrt{\frac{h}{Mk \cdot \log. \overline{k+l}}} \Big| dt$

$$= \frac{dx}{\sqrt{\frac{Mk \cdot \log. \overline{k+l}}{h} \cdot \frac{\overline{A \mp a}^2}{4} - x^2}}$$ Integrando

da cui si presenta $\frac{A \mp a}{2} \cdot t =$ Arco Rag. $\sqrt{\frac{Mk \cdot \log. \overline{k+l}}{h} \cdot \frac{\overline{A \mp a}^2}{4}}$ Seno x;

e quindi il tempo della comunicazione del moto colla legge dei corpi molli

$$t = \frac{2}{A \mp a} \cdot \text{Quad. Rag.} \sqrt{\frac{Mk \cdot \log. \overline{k+l}}{h} \cdot \frac{\overline{A \mp a}^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{Mk \log. \overline{k+l}}{h}} \cdot \text{Quad. Rag. } 1.;$$

e colla legge dei corpi elastici

$$t = \sqrt{\frac{Mk \log. \overline{k+l}}{h}} \cdot \text{Semicircolo Rag. } 1.$$

Questi tempi si esprimeranno in secondi nella seguente maniera

$$t = \sqrt{\frac{Mk \log. \overline{k+l}}{4h \cdot 36\frac{17}{24}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{Mk \cdot \log. \overline{k+l}}{h \cdot 36\frac{17}{24}}}.$$

Posto $k = \infty$, il nostro corpo DK diverrà un parallelepipedo, ed in tal circostanza sarà $\log. \overline{k+l} = \frac{l}{k}$; laonde i detti tempi prenderanno il nuovo aspetto

$$t = \sqrt{\frac{Ml}{4h \cdot 36\frac{17}{24}}}, \quad t = \sqrt{\frac{Ml}{h \cdot 36\frac{17}{24}}}, \text{ conforme}$$

si

si deduca dalla formola ritrovata al numero XXXV. adattandola al caso presente.

XXXX. Il volume del corpo DK si uguaglia a ce. $\frac{2KL+L^2}{2K}$. Un parallelepipedo sarà fornito dello stesso volume, quando non variandosi la base DH = ce, la sua lunghezza pareggi $\frac{2KL+L^2}{2K}$. Paragonando i tempi della comunicazione del moto fra i due prismi DK, e fra i due descritti parallelepipedi, fatta la riflessione, che le rigidità corrispondenti alla medesima base DH, e le masse hanno da un canto, e dall'altro lo stesso valore, gli scopriremo come $\sqrt{K.\log.\overline{K+L}} : \sqrt{\frac{2KL+L^2}{2K}}$, e ne dedurremo, quanto la varietà della figura diversifichi il tempo della comunicazione del moto.

Quando ho affermato dover esser minima la velocità relativa di due corpi, se anche la loro compressione ha da stare dentro i limiti della minima quantità, si dee ciò intendere rispettivamente alla rigidità h. Il bronzo per esempio è talmente rigido, che un forte colpo di martello non altera sensibilmente il suono di una campana. Quindi la velocità relativa di due corpi di bronzo, che si urtano, si può accrescere dentro certi non ristretti limiti,

e

e nulladimeno avverasi fisicamente il canone stabilito dal tempo, in cui segue la comunicazione del movimento.

Determinare il massimo allungamento, che il peso di un pendolo produce nella corda, a cui è attaccato.

I. Questo problema è stato da me sciolto, quando tentai la costruzione della curva descritta dalla ghianda di un pendolo, mettendo a computo la distensione della corda; ecco la strada da me interamente battuta. Il pendolo CB (fig. 35.) sia collocato in sito orizzontale: si dimanda qual curva BDA descriverà il punto B, mettendo a computo la distensione del filo, o corda CB. Sia giunto il pendolo nel sito CD, e poscia mova un minimo passo sino in C7. Col raggio CD descritto l'archetto DG, conduco pel punto D la perpendicolare eDH; e segno DH eguale al peso, o massa del corpo B, e pel punto H delineo HI normale a CD prodotta. Finalmente pel punto 7 tiro la perpendicolare 7K, e pel punto D l'orizzontale DL.

Pongo $CB = L$, $CD = L+l$, $eD = y$, $Ce = x = \sqrt{\overline{L+l}^2 - y^2}$, $BD = s$, $GD = dz$, e si avrà per conseguenza $G7 = dl$, $L7 = dy$, $eK = -dx = -\left(\frac{\overline{L+l}.\,dl - ydy}{\sqrt{\overline{L+l}^2 - y^2}}\right)$, $D7 = ds$, $dz = \sqrt{ds^2 - dl^2}$. Sia inoltre M la massa, o peso del corpo B, e u la sua velocità per la direzione DG, ed v la velocità assoluta per l'archetto D7 della curva.

II. Eguagliandosi ad u^2 il quadrato

dalla

dalla velocità in D per la direzione DG, avremo la forza centrifuga nel detto punto $= \frac{Mu^2}{L+l}$.
Il peso, o forza DH si risolva nelle due, IH che stimola il corpo per la direzione DG, e DI che lo stimola per la direzione CI. Le due seguenti analogie determinano la predetta forza:

$$CD : CG :: DH : HI$$
$$L+l : x :: M : \frac{Mx}{L+l}$$
$$CD : DG :: DH : DI$$
$$L+l : y :: M : \frac{My}{L+l}$$

Si inferisca, che il corpo B è spinto per la direzione CI dalla forza $\frac{Mu^2 + My}{L+l}$. Da tale forza egli è di uopo sottrar quella, con cui la corda resiste all'allungamento, la quale pel numero XV. dello Schediasma I. pareggia $\frac{1}{2}h \cdot \frac{L+l}{L} - \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}$, dinotando h la rigidità naturale della corda non istirata da peso alcuno, cioè a dire di essa corda situata nella posizione orizzontale CB. Sarà dunque la forza residua $= \frac{Mu^2 + My}{L+l} - \frac{1}{2}h \cdot \frac{L+l}{L} + \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}$, la quale può supporsi, che agisca per lo spazio $GI = dl$. Ho detto può supporsi; perchè la forza centrifuga $\frac{Mu^2}{L+l}$ non è atta ad esercitar veruna azione, che alteri lo stato del corpo, ma può solo cangiare la proporzione fra le velocità per DG, GI, senza punto mutare dal suo canto la velocità assoluta per l'arco DI della curva, alla qual condizione due il calcolo soddisfare: sopra di che veggasi la Dissertazione intorno la vera Origine,

e Natura, della Forza centrifuga contenuta nella Raccolta di Lucca del 1763. Avremo pertanto il quadrato della velocità per la direzione CD =

$$\frac{2}{M}\int \frac{Mu^2 d\ell + My\,d\ell}{L+\ell} - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{L d\ell + \ell d\ell}{L} + \tfrac{1}{2}\frac{hL\,d\ell}{L+\ell}\ (1.)$$

Replicando la forza $DH = \frac{Mx}{L+\ell}$, i suoi impulsi per gli elementi dello spazietto $DG = dz$, il quadrato della velocità per la direzione DG uguaglia la quantità $\frac{2}{M}\int\frac{Mx\,dz}{L+\ell}$ (2.): ma questi due quadrati deggiono stare come $d\ell^2 : dz^2$; dunque $d\ell^2 \int \frac{Mx\,dz}{L+\ell} =$

$$dz^2 \int \frac{Mu^2 d\ell + My\,d\ell}{L+\ell} - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{L d\ell + \ell d\ell}{L} + \tfrac{1}{2}\frac{hL\,d\ell}{L+\ell}\ (3).$$

III. Non esercitandosi altra vera azione, che la positiva della gravità del corpo B; la quale si è applicata allo spazio $ED = y$, e la negativa della tensione della corda CD, che ha ripetuto i suoi contrasti per gli spazietti $d\ell$, si avrà

$$My - \int \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{L d\ell + \ell d\ell}{L} - \tfrac{1}{2}\frac{hL\,d\ell}{L+\ell} = \frac{Mv^2}{2},$$

o sia effettuando le indicate integrazione,

$$My - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{2L\ell + \ell^2}{2L} + \tfrac{1}{2}hL\log.\overline{L+\ell} = \frac{Mv^2}{2}.$$

I logaritmi si debbono prendere nella logistica della suttangente = 1, riferita al protonumero $CB = L$. Non ho aggiunta costante; perchè senza tale addizione, nella posizione CB del pendolo, in riguardo a cui $y = 0$, $\ell = 0$, si trova rettamente $v = 0$. Ora il quadrato della velocità per DF pareggia i due quadrati della velocità per DG, GF; dunque My

$$-\tfrac{1}{2}h\cdot\frac{2L\ell+\ell^2}{2L} + \tfrac{1}{2}hL\log.\overline{L+\ell} = \int\frac{Mx\,dz}{L+\ell}$$

$$+\int\frac{Mu^2 d\ell + My\,d\ell}{L+\ell} - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{L d\ell + \ell d\ell}{L} + \tfrac{1}{2}\frac{hL\,d\ell}{L+\ell}\ldots$$

In

In cambio dalla ultima sommatoria colloco il suo valore, che si raccoglie dalla formola (2.), cioè $\frac{dl^2}{dz^2}\int\frac{Mx\,dz}{\alpha+l}$, e trovo

$$My - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{\overline{2\alpha l+l^2}}{2\alpha} + \tfrac{1}{2}h\alpha\log.\overline{\alpha+l} = \frac{\overline{dz^2+dl^2}}{dz^2}\int\frac{Mx\,dz}{\alpha+l}$$

$= \frac{ds^2}{dz^2}\int\frac{Mx\,dz}{\alpha+l}$, e moltiplicando per dz^2,

$$dz^2\cdot\overline{My - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{2\alpha l+l^2}{2\alpha} + \tfrac{1}{2}h\alpha\log.\overline{\alpha+l}} = ds^2\int\frac{Mx\,dz}{\alpha+l}\ (4.).$$

Prendo le differenze nella supposizione di ds costante, e dividendo poscia per dz, scopro

$$dz\cdot\overline{M\,dy - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{\alpha dl+l\,dl}{\alpha} + \frac{\tfrac{1}{2}h\alpha\,dl}{\alpha+l}}$$
$$+\,2\,ddz\cdot\overline{My - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{2\alpha l+l^2}{2\alpha} + \tfrac{1}{2}h\alpha\log.\overline{\alpha+l}}$$
$$= \frac{Mx\,ds^2}{\alpha+l}\ (5.).$$

IV. Col mezzo delle equazioni $\alpha+l = \sqrt{x^2+y^2}$, $dl = \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $dz = \sqrt{ds^2-dl^2}$ $=\sqrt{dx^2+dy^2-dl^2}$ troveremo $dz = \frac{x\,dy-y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$ddz = \frac{x\,ddy-y\,ddx}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\overline{x\,dy-y\,dx}\cdot\overline{x\,dx+y\,dy}}{\overline{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

e perchè $ds^2=dx^2+dy^2$ è costante, avremo $-ddx = \frac{dy\,ddy}{dx}$, e per conseguenza

$$ddz = \frac{\overline{x\,dx+y\,dy}}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\overline{\frac{ddy}{dx} - \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}}.$$

effettuate le convenienti sostituzioni nella formola (5.), mi si presenta, dopo le riduzioni necessarie

$h.\frac{\overline{x^2+y^2-L^2}}{2L}.-x\,dx\,dy+y\,dx^2$

$+My-h.\frac{\overline{x^2+y^2-L^2}}{4L}+\frac{1}{2}hL\log.\sqrt{x^2+y^2}.$

$\overline{2x^2ddy+2y^2ddy-2x\,dx\,dy+2y\,dx^2}$

$=M.\overline{x^2dx^2+y^2dx^2}\ (6).$

Avendo luogo in questa formola differenziale del secondo grado amendue le incognite finite, e non potendo ad essa adattarsi veruno de' tre metodi insegnati dal dottissimo Signor Leonardo Eulero nel Tomo terzo dell'Accademia Petropolitana, non è nota la maniera di ridurla alla prima differenza; e quindi non riesce di dar compimento alla soluzione del nostro problema.

V. Ci è permesso bensì di scoprire il massimo allungamento della corda corrispondente alla positura CA; quando le due linee $BD = y$, $CD = L+l$ coincidono, onde si abbia $y = L+l$. Ho determinato nel numero II. la forza, che allunga la corda $= \frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{1}{2}h.\frac{\overline{L+l}}{L} + \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l} = \frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{2hLl-hl^2}{2L.\overline{L+l}}$. Qualora l'allungamento sia giunto al massimo, questa forza dee pareggiare il nulla, e per conseguenza $Mu^2 = \frac{2hLl+hl^2}{2L} - My$: ma in tal caso $y = L+l = CA$; dunque $Mu^2 = \frac{2hLl+hl^2}{2L} - M.\overline{L+l}$. La velocità u normale alla direzione della corda si uguaglia nella mentovata circostanza alla velocità assoluta v del corpo B, ed

essendo

essendo generalmente

$Mv^2 = 2My - \frac{2hLf - hf^2}{2L} + hL\log\overline{L+f}$,

e nella ipotesi di $y = L+f$

$Mv^2 = 2M\cdot\overline{L+f} - \frac{2hLf - hf^2}{2L} + hL\log\overline{L+f}$,

avremo $\frac{2hLf + hf^2}{2L} - M\cdot\overline{L+f} =$

$2M\cdot\overline{L+f} - \frac{2hLf - hf^2}{2L} + hL\log\overline{L+f}$; e

perciò $\log\overline{L+f} = \frac{2Lf+f^2}{L^2} - \frac{3M\cdot\overline{L+f}}{hL}$ (7.)

Fatte due equazioni $\log\overline{L+f} = p$ (8.),

$\frac{2Lf+f^2}{L^2} - \frac{3M\cdot\overline{L+f}}{hL} = q$ (9.), e quest'ultima

si riduce alla seguente

$\overline{L+f-\frac{3LM}{2h}}^2 = L^2\cdot\overline{1+\frac{9M^2}{4h^2}+q}$ (9.)

VI. All'asse BI (fig. 36.), col parametro L^2 delineo la parabola BDeA, in cui all'ascissa $BI = 1 + \frac{9M^2}{4h^2} + q$ corrisponderà l'ordinata $IA = L+f-\frac{3LM}{2h}$. Continuata pertanto AI sino in C, dimodochè sia $CI = \frac{3LM}{2h}$, ne risulterà $CA = L+f$. Dal punto C si tiri CK parallela ad IB, e segnata inoltre $B7 = 1$, a cui si riferisca $7D = L$, $7G = \frac{9M^2}{4h^2}$, sarà GI, o sia $LC = q$.

Faccio $LH = 7D = L$, ed all'assintoto KC descrivo la logaritmica MHA della sottangente $= B7 = 1$, che passi pel punto H, il cui protonumero $LH = L$. Essendo $LH < KA$, la logaritmica

tagliarà

taglierà la parabola in un punto A, per cui si conduca l'ordinata AC. Giusta la equazione (4.) $\log. L+l = p$, avremo $Lc = p$, $CA = L+l$; ma per la equazione (9.) $\frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.\overline{L+l}}{hL} = q$, $LC = q$, $CA = L+l$; dunque rispettivamente al punto A $p = q$, e per conseguenza si averà l'equazione (7.) $\log.\overline{L+l} = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.\overline{L+l}}{hL}$, e $CA = L+l$ è la massima lunghezza, a cui perviene (fig. 35.) il filo del pendolo CB, quando è giunto nel sito verticale CA.

VII. Se la rigidità naturale h della corda, che ad essa compete prima che si cominci ad allungare, sia infinitamente piccola, diverrà infinita la linea (fig. 36) $LG = \frac{3LM}{2h}$. Lo stesso valore adequatamente competerà anche alla ordinata Ge della parabola, la quale si eguaglia a $\sqrt{L^2.\overline{1+\frac{9M^2}{4h^2}}} = \frac{3LM}{2h} + \frac{Lh}{3M} = \frac{3LM}{2h}$, e perciò $Le = \frac{3LM}{h}$. Quindi il punto H disterà infinitamente dal punto e, e la logistica MHA taglierà la parabola BDeA in un punto A immensamente lontano dal punto e; di maniera che si è infinita Le, tanto più riuscirà infinita $CA = L+l$. Destochè fosse $h = 0$, il filo (fig. 35.) CB non farebbe alcuna resistenza, ed il corpo B discenderebbe per la linea del piombo BO, nè per quanto si allungasse il filo benchè infinitamente, potrebbe

mai

mai giungere, se non per adequazione, nella positura CA. Che se suppongasi h infinitesima, il pendolo perverrà nel sito CA, ma dopo un allungamento infinito.

VIII. Passo all'ipotesi contraria, e fingo infinita la naturale rigidità h. In tale circostanza diviene minima la linea $LG = \frac{3LM}{2h}$, ed immensamente ancora più piccola è la linea $PG = \frac{9M^2}{4h^2}$. Si adeguano dunque le due ordinate PD, GE, ed altresì le due linee $LG = LH - GH$, $HE = GE - GH$; laonde il punto H è infinitamente prossimo al punto E della parabola. Si inferisca, che ancora il punto A, in cui le due curve si intersecano, sarà vicinissimo al punto E, e perciò $CA = L+l$ supererà infinitamente poco $LH = L$. Presa per mano la formula (2.) $\log.\overline{L+l} = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.\overline{L+l}}{hL}$, e fatta la riflessione essere nella presente supposizione $\log.\overline{L+l} = \frac{l}{L}$, ed l^2 trascurabile rispettivamente ad l, troveremo $hl = 2hl - 3M.\overline{L+l}$, e conseguentemente $\frac{3ML}{h-3M} = l$, o sia per adequazione $\frac{3LM}{h} = l$; ma $HE = LG = \frac{3LM}{2h}$; dunque tirata HN parallela a BD, ne risulta $NA = l = 2HE$.

Nel citato Schediasma I. ho fatto vedere quanto sia grande la rigidità naturale

naturale anche nella corda di metallo. La rigidità naturale corrispondente al peso di due libre, che stirava una corda da me usata in alcuna sperienza riferita nel numero XVIII. ascendeva a libre $1134\frac{7}{13}$. Supponiamo pertanto, che la rigidità naturale della corda del pendolo nel sito orizzontale CB (fig. 36.) si agguagli a libre 1201, e sia inoltre $M = \frac{1}{3}$, L = once 12 = linee 144, e facendo uso della formola $f = \frac{3ML}{h-3M}$ competente alla ipotesi di h infinita, si troverà il massimo allungamento $f = \frac{144}{1201-1} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$ di linea.

IX. Volendo dedurre la misura della distensione f dalla formola ($\&$) $\log.\overline{L+f} = \frac{2Lf+f^2}{2L^2} - \frac{3M.\overline{L+f}}{hL}$, egli è di uopo rivolgere alla attenzione. Per servirsi dei logaritmi delle tavole, si rifletta, che nella logistica della suttangente $= 1$. $\log.\overline{L+f}$ riferito al protonumero L si agguaglia a $\log.\frac{L+f}{L}$ riferito al protonumero $= 1$. Ora la logaritmica delle tavole ha il logaritmo del numero 10 $= 1$, e nella logaritmica della suttangente $= 1$ il logaritmo del predetto numero è $= 2,3025851$. Rispettivamente al medesimo protonumero i logaritmi dello stesso numero stanno come quelli di un numero dato. Prendendo adunque $\log.\frac{L+f}{L}$ nelle tavole, si faccia $1 : 2,3025851 ::$

$\log.\frac{L+f}{L}$

$\log.\frac{L+l}{L} = 2,3025851 \log.\frac{L+l}{L}$; ed il quarto termine pareggerà nella logistica della suttangente $= 1 \log.\frac{L+l}{L}$ riferito al protonumero $= 1$, e conseguentemente $\log. L+l$ riferito al protonumero L. Quindi valendoci dei logaritmi delle tavole avremo $2,3025851 \log.\frac{L+l}{L}$ $= \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M \cdot L+l}{hL}$, formola, che si riduce alla seguente

$$L\sqrt{2,3025851 \log.\frac{L+l}{L} + 1 + \frac{9M^2}{4h^2}} + \frac{3ML}{2h} = L+l \ (10.).$$

Si assegni ad $L+l$ un valore più prossimo al vero che sia possibile, deducendolo o dalla costruzione delineata diligentemente, e con fisica esattezza, o come nell'esempio addotto, quando la rigidità h è assai grande, dalla formola $l = \frac{3ML}{h-3M}$. Nel nostro esempio adunque si ponga $L+l = 144,12$, onde si abbia $\frac{L+l}{L} = \frac{14412}{14400} = \frac{1201}{1200}$, e $\log.\frac{1201}{1200} = 0,0003620$. Sostituiti nella formola generale (10.) in vece di $\log.\frac{L+l}{L}$, di L, di M, e di h gli stabiliti valori, si troverà dopo i necessarj calcoli $144,119964 = L+l$, valore adequatamente uguale al supposto, consistendo la differenza nella minuzia 0,000036

e si avrà a 3 6. Qui non ci è bisogno di passare ad altre operazioni, perchè abbiamo determinato il valore di $L+l$ sommamente prossimo al vero. Per altro il trovare $L+l$ minore del valore supposto significa, che il detto valore ipotetico è più grande del giusto.

X. Se la prima posizione CP (fig. 37.) del pendolo fosse inclinata all'orizzonte, si tirino PM, CB orizzontali, e PA verticale, e ritenute le altre denominazioni, si chiami $CP = L$; $CM = a$. Nel sito CP il filo sarà stirato dalla forza $\frac{aM}{L}$, e perciò a questa forza tendente dovrà corrispondere la rigidità naturale $= h$. Giunto il pendolo in CD, sarà la corda stirata dalla forza $\frac{Mu^2 + My}{L+l}$, a cui pel numero XV. dello Schediasma I. farà contrasto la forza $\overline{\tfrac{1}{2}h + \tfrac{aM}{L}} \cdot \overline{\tfrac{L+l}{L}} - \tfrac{1}{2}h \cdot \frac{L}{L+l}$. Avremo dunque la forza residua $= \frac{Mu^2 + My}{L+l} - \overline{\tfrac{1}{2}h - \tfrac{aM}{L}} \cdot \overline{\tfrac{L+l}{L}} + \tfrac{1}{2}h \cdot \frac{L}{L+l}$.

Il corpo B nel punto D verrà animato dalla forza viva $\frac{Mv^2}{2} = My - Ma - \int \overline{\tfrac{1}{2}h + \tfrac{aM}{L}} \cdot \overline{\tfrac{Ldl + ldl}{L}} - \tfrac{1}{2}h \frac{Ldl}{L+l} = My - Ma - \overline{\tfrac{1}{2}h - \tfrac{aM}{L}} \cdot \overline{\tfrac{2Ll + l^2}{2L}} + \tfrac{1}{2}hL \log. \overline{L+l}$ prendendo i logaritmi nella logistica della suttangente $= 1$, riferita al protonumero $CP = L$. Ora nel punto A $u = v$, $y = L+l$, e la forza allungante la corda esser dee $= 0$; dunque

$2M \cdot \overline{L+l}$

$$\frac{2M\cdot\overline{L+l} - 2Ma - \overline{h - \frac{2aM}{L}}\cdot\frac{\overline{2Ll+l^2}}{2L} + hL\log.\overline{L+l}}{L+l}$$

$+ M - \overline{\tfrac{1}{2}h - \frac{aM}{L}}\cdot\frac{\overline{L+l}}{L} + \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l} = 0$ (11.) la qual formola si riduce alla seguente

$$\sqrt{\frac{hL^3\log.\overline{L+l} + hL^3 - aML^2}{hL+2aM} + \frac{\frac{9}{4}M^2L^4}{\overline{hL+2aM}^2}} + \frac{\frac{3}{2}ML^2}{hL+2aM} = L+l \quad (12.)$$

e volendo far uso dei logaritmi delle tavole

$$\sqrt{\frac{2,302585\,hL^3\log.\frac{L+l}{L} + hL^3 - aML^2}{hL+2aM} + \frac{\frac{9}{4}M^2L^4}{\overline{hL+2aM}^2}} + \frac{\frac{3}{2}ML^2}{hL+2aM} = L+l \quad (13.)$$

Col mezzo di questa equazione si troverà la massima lunghezza $L+l = CA$ della corda, ponendo in opera il metodo delle attentazioni.

XI. La formola (11.) si può costruire collo stesso artifizio usato rispettivamente alla formola (7.). La mentovata formola (11.) si trasforma così $\log.\overline{L+l} = \frac{\overline{hL+2aM}\cdot\overline{2Ll+l^2}}{hL^3} - \frac{3M}{hL}\cdot\overline{L+l} + \frac{3aM}{hL}$

Facendo $\log.\overline{L+l} = p$ (14.),

$$\frac{\overline{hL+2aM}\cdot\overline{2Ll+l^2}}{hL^3} - \frac{3M\cdot\overline{L+l}+3Ma}{hL} = q \quad (15.)$$

L'ultima equazione dopo varie operazioni prende il sottoposto aspetto

$$\overline{L+l+\tfrac{3}{2}\tfrac{ML}{h}}^2 = \frac{hL^3}{hL+2aM}\cdot\overline{\frac{9M^2L}{4h\cdot\overline{hL+2aM}} - \frac{aM}{hL} + 1 + q},$$

e si costruisce nella maniera seguente.

All'asse AD (Fig. 36.) col parametro $\frac{hL^3}{hL+2aM}$ delineo la parabola ADQA,

le

le cui assisse $BI = \frac{gM^2L}{4h.\overline{hL+2aM}} - \frac{aM}{hL} + 1 + g$,
e le ordinate $IA = L + l - \frac{3}{2}\frac{ML}{h}$. Aggiunta
alle ordinata IA la linea $CI = \frac{3}{2}\frac{ML}{h}$,
ne risulta $CA = L + l$. Taglio poscia
$BG = \frac{gM^2L}{4h.\overline{hL+2aM}} - \frac{aM}{hL} + 1$, e resta
$GI = LC = g$.

Segnata $LH = L$, che prendo in figura di protonumero, all' assintoto CK descrivo la logaritmica AHM della suttangente $= 1$, la cui coordinata $LC = p$, $CA = L + l$. Si intersechano la parabola, e la logistica nel punto A; e giacchè rispettivamente ad esso punto g, e p hanno lo stesso valore, ed altresì è comune la ordinata $CA = L + l$, avremo
$\log.\overline{L+l} = \frac{\overline{hL+2aM}.\overline{2Ll+l^2} - 3M.\overline{L+l} + 3aM}{hL^3}$,
conforme richiede la equazione (11.), e perciò CA sarà la massima lunghezza, a cui perviene la corda, mentre il pendolo oscilla.

XII. L'allungamento l può esser minimo o perchè sia infinita la naturale rigidità h della corda, relativa alla forza stirante $\frac{aM}{L}$, o perchè sia infinitesimo il angolo (fig. 37.) ACP. In ambo le circostanze si avrà $\log.\overline{L+l} = \frac{l}{L}$, e riuscirà trascurabile la quantità rispettivamente nulla l^2. Scopriremo pertanto, ridotto il computo, $\frac{3ML.\overline{L-a}}{hL+4aM-3ML} = l$ (16.).

Sia

Schediasma XIII.

Sia infinitamente grande la rigidità h, e cancellati nel denominatore i termini minimi in riguardo ad hL, avremo $\frac{3M \cdot \overline{L-a}}{h} = f$.

Se stando dentro i limiti del finito la rigidità h, fosse (fig. 37.) infinitesimo l'angolo ACP, e per conseguenza minima la tangente $MP = b$, descritto col raggio $CM = a$ l'arco MQ, onde ne risulti $QP = L-a$, si avrebbe $L^2 - a^2 = b^2$, o sia $L-a = \frac{b^2}{L+a}$; e giacchè adequatamente $a = L$, ne risulterebbe $L-a = \frac{b^2}{2L}$.

Nel numeratore della formola (16.) si ponga in cambio di $L-a$ il suo valore $\frac{b^2}{2L}$, e nel denominatore si collochi $2ML$ in vece di $2aM$, e ci si presenterà

$$\frac{3Mb^2}{2hL+2ML} = f.$$

Appendice
allo Schediasma I.

I. Al numero XX dello Schediasma I. asserisco fondato sulla mia teorica, e sugli esperimenti di M. Sauveur, che in una corda sono due cose diverse la rigidità, che ripugna alle distensioni, e la tenacità, che ne impedisce il rompimento sino ad un certo segno. La corda da me usata nella sperienza si sarebbe rotta applicandole il peso di libre [illegible] + grani 132 $\frac{12}{13}$, e nell'atto di rompersi sarebbe stata fornita della rigidità naturale equivalente a libre 1124 $\frac{1}{2}$ a un di presso, grandezza incomparabilmente maggiore della tenacità di essa corda alquanto più piccola del peso di libre [illegible], e grani 132 $\frac{12}{13}$, che l'ha superata.

Ora il chiarissimo P. D. Girolamo Saladini la discorre acutamente così. La rigidità naturale non può esser altro, che una specie di resistenza, la quale ad esser equilibrata esige, che le si applichi un determinato peso, prima che la corda ad allungarsi incominci. Ma egli è impossibile, che si rompa, se allungata non sia; dunque perchè si rompa, converrà aggiungere un altro peso a quello, che equilibra la rigidità naturale. E come dunque può stare, che il peso rompente la corda sia minore della rigidità naturale, se deve esser uguale a quello, che equilibra la detta rigidità coll'aggiunta

di un

di un altro?

II. La difficoltà è degna di chi la propone, e merita di essere maturamente discussa. Per iscoprirne lo scioglimento, egli è di uopo considerare, che la corda non tirata conserva la sua naturale lunghezza, e ad accorciarsi, o ad allungarsi egualmente ripugna. Si cavi adunque la conseguenza, che la rigidità naturale ha da essere equilibrata da un'altra forza, e che un tale bilanciamento impedisca, che la corda muti figura, quando non ci sia una forza estrinseca, che la frastorni. Venendo gli equilibrj turbati da ogni forza quantunque picciola; ne segue, che attaccato qualsivoglia peso alla corda, dee rompere l'equilibrio, ed allungare la corda stessa. Che se qualcuno opponesse, che in sì fatta guisa la rigidità naturale si pone, e si toglie nel tempo medesimo, ed è come se non ci fosse; rispondevasi, che siccome al crescere della rigidità artificiale, quantunque bilanciata dal peso P, cala la distensione prodotta dal peso aggiunto dp; così quanto è più grande la rigidità naturale, benchè equilibrata, tanto riesce più piccolo l'allungamento operato dal peso dp; e quindi non si avvera, che sia lo stesso come se non esistesse la naturale rigidità equilibrata.

III. Nè si può sostenere, che la

rigidità

rigidità naturale sia soltanto una forza passiva, nella quale ipotesi, per dir il vero, la corda non si allungherebbe, se non applicandole un peso maggiore di essa rigidità. Imperocchè abbiasi la corda AB (Fig. 38.), a cui si appenda il peso P, che formi equilibrio colla rigidità naturale, e giusto la supposizione, che si combatte, non produca distensione veruna. Si aggiunga poscia il peso dp, il quale allungando la corda, discenda congiuntamente col peso P accelerandosi, e ritardandosi per lo spazio minimo AC, e pervenga alla quiete nel punto C. Normale ad AC conduco la linea AE uguale al peso P, o sia alla rigidità naturale, e tagliata AD = dp, compio i due rettangoli AH, AF. Segno di poi CG = 2AD = 2dp, e tiro la diagonale AG. Essendo minimo il peso aggiunto dp, le ordinate del triangolo ACG dinotano le artificiali rigidità crescenti della corda, secondochè si va maggiormente stendendo, e l'aja dello stesso triangolo pareggia la reazione delle predette rigidità: ma per la costruzione il mentovato triangolo si agguaglia al rettangolo AF, che esprime l'azione del peso AD = dp, e l'azione AH del peso AE = P è compensata da una pari reazione della rigidità naturale; dunque agguagliandosi l'azione totale alla totale reazione, i pesi P + dp si sono ridotti in quiete nel sito C, dove la rigidità artificiale della corda è doppia del peso aggiunto

dp

dp. Ovvero dico, che posta la rigidità naturale una forza soltanto passiva, e considerandola come forza passiva, ed attiva la rigidità artificiale, i pesi P+dp si fermerebbero nel sito C, ne seguirebbe reciprocazione; dimodochè la corda sarebbe molle, e non elastica, come per altro supponessi. E voglia il vero i pesi P+dp sono spinti all'ingiù dalla forza P+dp infinitamente maggiore di quella 2dp, uguale alla rigidità artificiale, che li tira all'insù, e per conseguenza non è loro permesso di ascendere.

IV. Non così succede supponendo la rigidità naturale una forza attiva equilibrata da un'altra forza esistente nella medesima corda. In tale ipotesi non c'è bisogno del peso P, che la equilibri; laonde applicato il solo peso dp, e giunto esso nel punto C allo stato di quiete, sarà tirato abbasso dalla forza dp, e spinto in alto dalla forza doppia 2dp, e perciò salirà sino al punto B, indi tornerà a discendere, ed una tale vicenda continuerebbe all'infinito, se non vi fossero resistenze. E perchè si danno effettivamente le notate oscillazioni, e reciprocazioni, resta ad evidenza provato, che la rigidità naturale è una forza attiva, ed equilibrata, e si conferma quello che ho detto sul bel principio, che intanto la corda non istirata conserva la sua figura, in quantochè

la

la rigidità naturale è una forza attiva, in equilibrio, che da un'altra forza inviscerata nella corda stessa è tenuta in bilanciamento. Le due rigidità naturale ed artificiale appartengono alla stessa specie di forza, ed anzi la seconda non è che un accrescimento della prima. La naturale sta in equilibrio con una forza appiccata nella corda, l'artificiale col peso o forza tendente. Nasce principalmente la rigidità naturale dalla costipazione cagionata dal passar che fa la corda innumerabili volte con sommo sforzo per trafila sempre più ristretta: e la forza, che l'equilibra, trae la sua origine dallo ristringimento delle particelle metalliche, che impedisce alla corda il dilatarsi, dopo che è uscita dalla trafila. Gittata una corda nel fuoco, la violenza di questo elemento la rarefà, le fa perdere la più rilevante rigidità, e con essa la sonorità per lo meno in gran parte. Concludasi, che venendo una corda allungata da qualsivoglia benché minimo peso, si schiva di assumere che un peso minore della rigidità naturale la rompa senza allungarla

V. Finisco con alcune riflessioni importanti intorno alla tenacità delle corde di metallo. Quella tenacità, che unicamente si manifesta negli sperimenti, e che col mezzo della tensione si vince, è non solo di gran lunga minore della totale rigidità, ma ancora della rigidità

naturale

naturale. Al contrario la predetta tenacità è sempre più grande della rigidità artificiale, quando la corda si conserva intera; ed allora soltanto queste due forze si uguagliano, quando la corda è infinitamente prossima a rompersi. Ma una tale tenacità si uguaglia poi alla totale tenacità della corda? certamente che no. Bisogna aggiungervi una porzione molto maggiore uguale alla rigidità naturale corrispondente al peso, che accresciuto di un minimo rompe la corda; onde l'intera tenacità pareggi la somma della rigidità naturale, ed artificiale, di cui è fornita la corda nell'atto di rompersi. La tenacità uguale alla naturale rigidità è tenuta in equilibrio dalla tante volte nominata forza esistente nella corda; e perciò equilibrata col mezzo della tensione la rimanente tenacità, basta l'accrescimento di un peso minimo per frangere la corda. Sintantochè la corda non è vicina a spezzarsi, l'intera tenacità è maggiore della intera rigidità, e solo quando la rottura è imminente, le mentovate forze giungono alla uguaglianza.

Credo, se pure non prendo errore, che sia quanto basta spianata la proposta difficoltà; ed io ringrazio divotamente lo stimatissimo Padre D. Girolamo Saladini, che mi abbia dato occasione di discutere un punto, che veramente meritava di essere dilucidato.

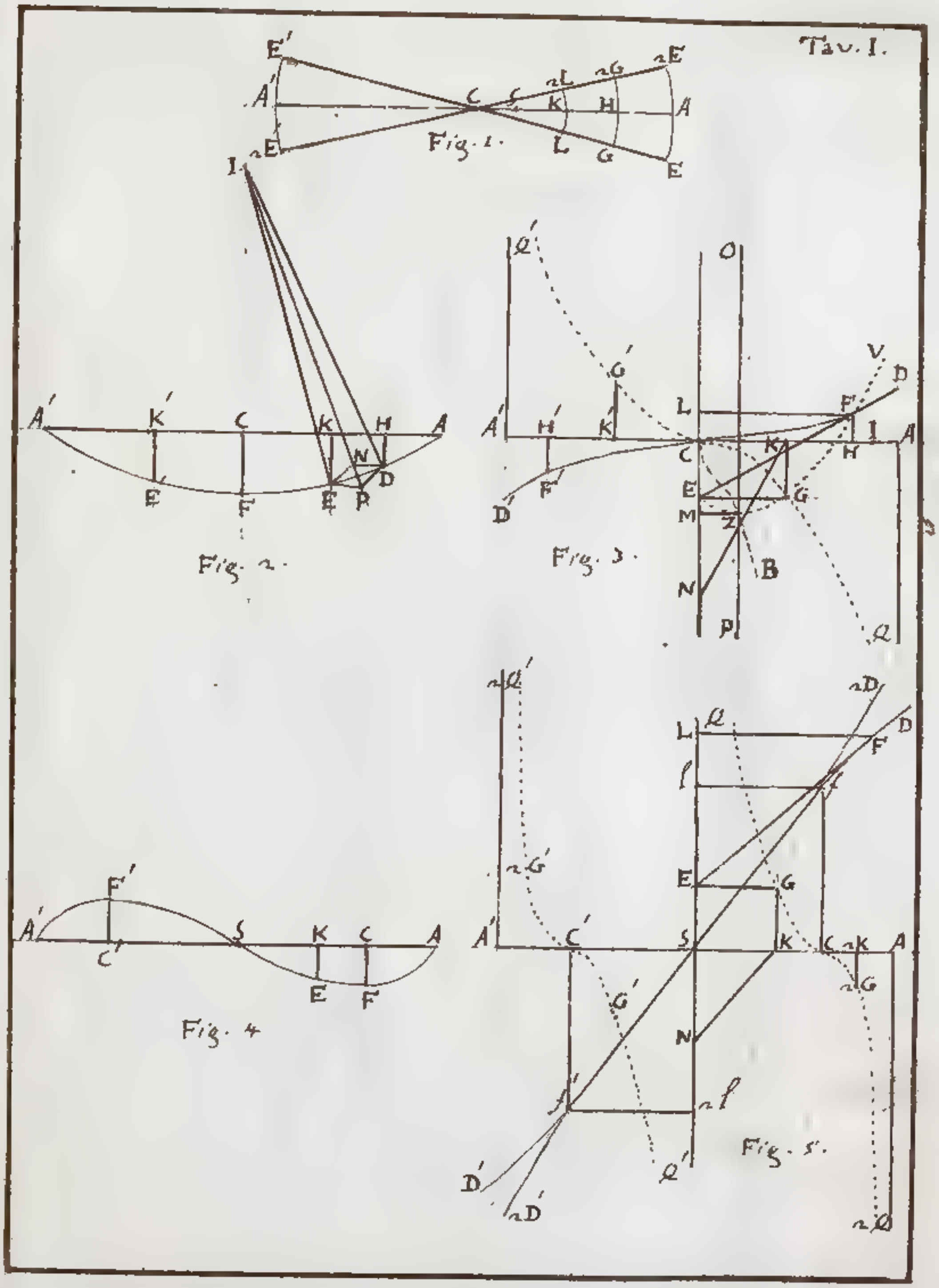
Die 6 Febr.ii 1770

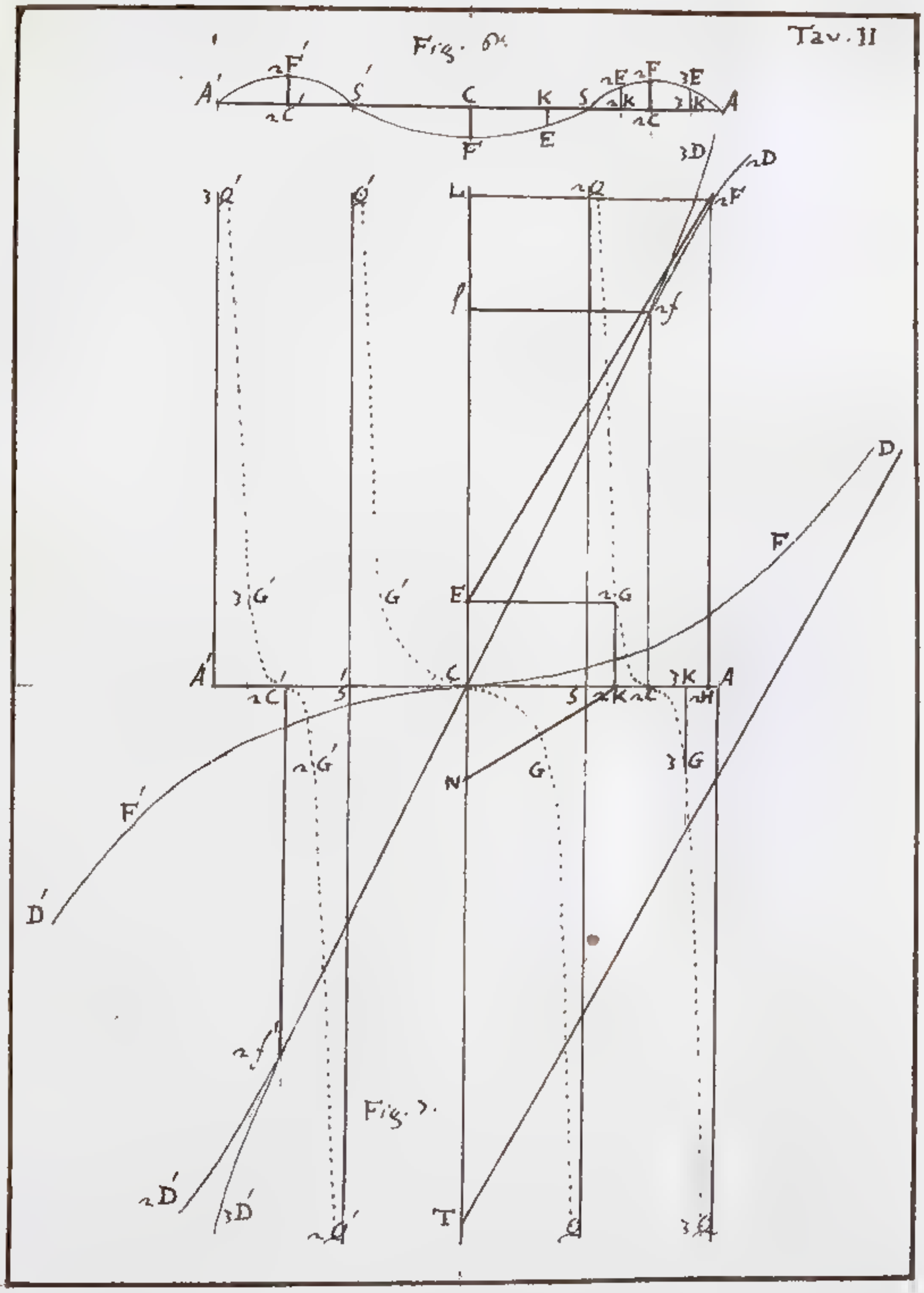
F. D. Michael Angelus [illegible] Pœnit.

Imprimatur

F. Vin.us Colombani Vic. Gen.lis S. O. Bononiæ.

Schediasma I.


Tav. I.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.


Tav. II
Fig. 6
Fig. 7

Tav. III.

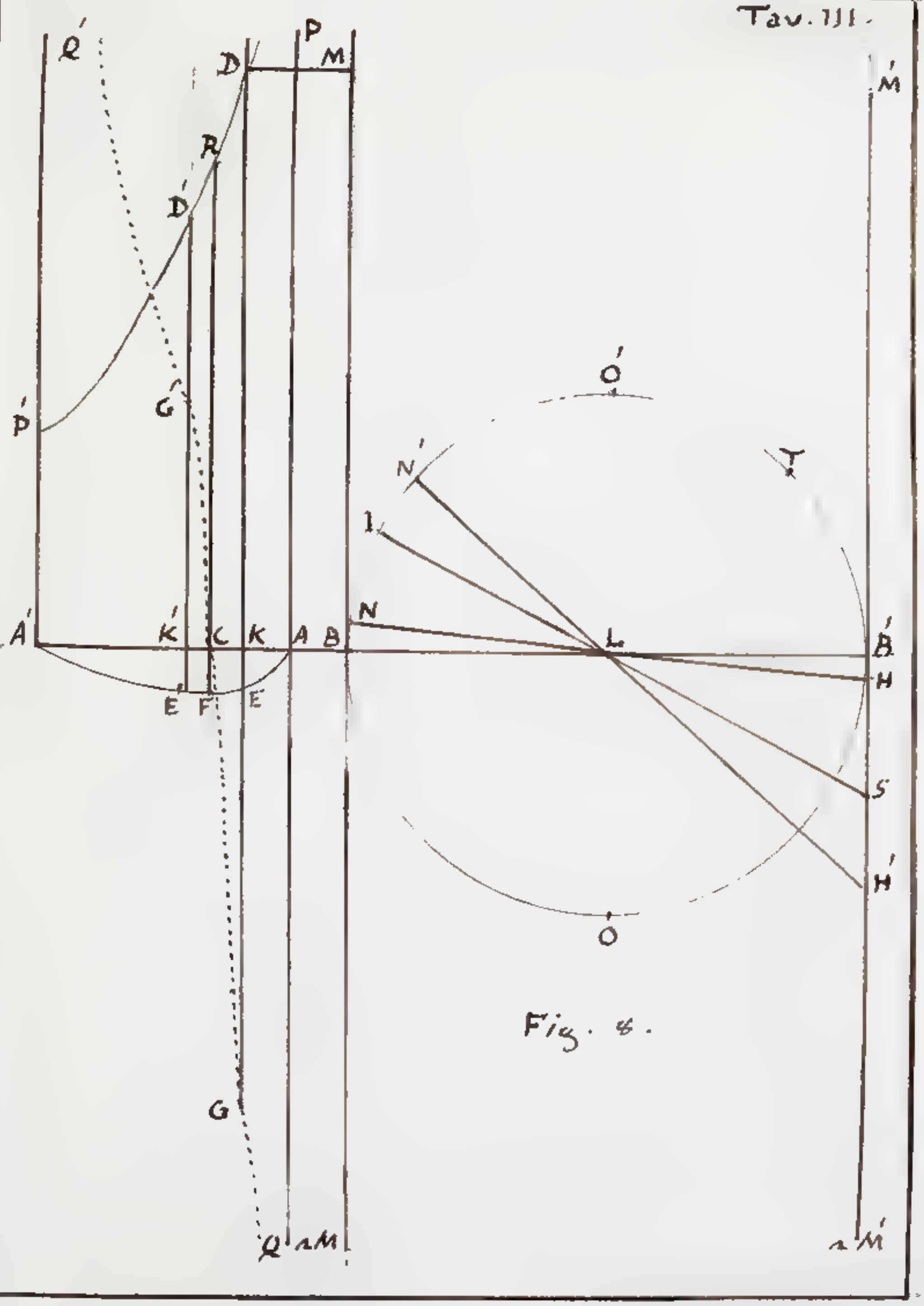


Fig. 4.

Tav IV

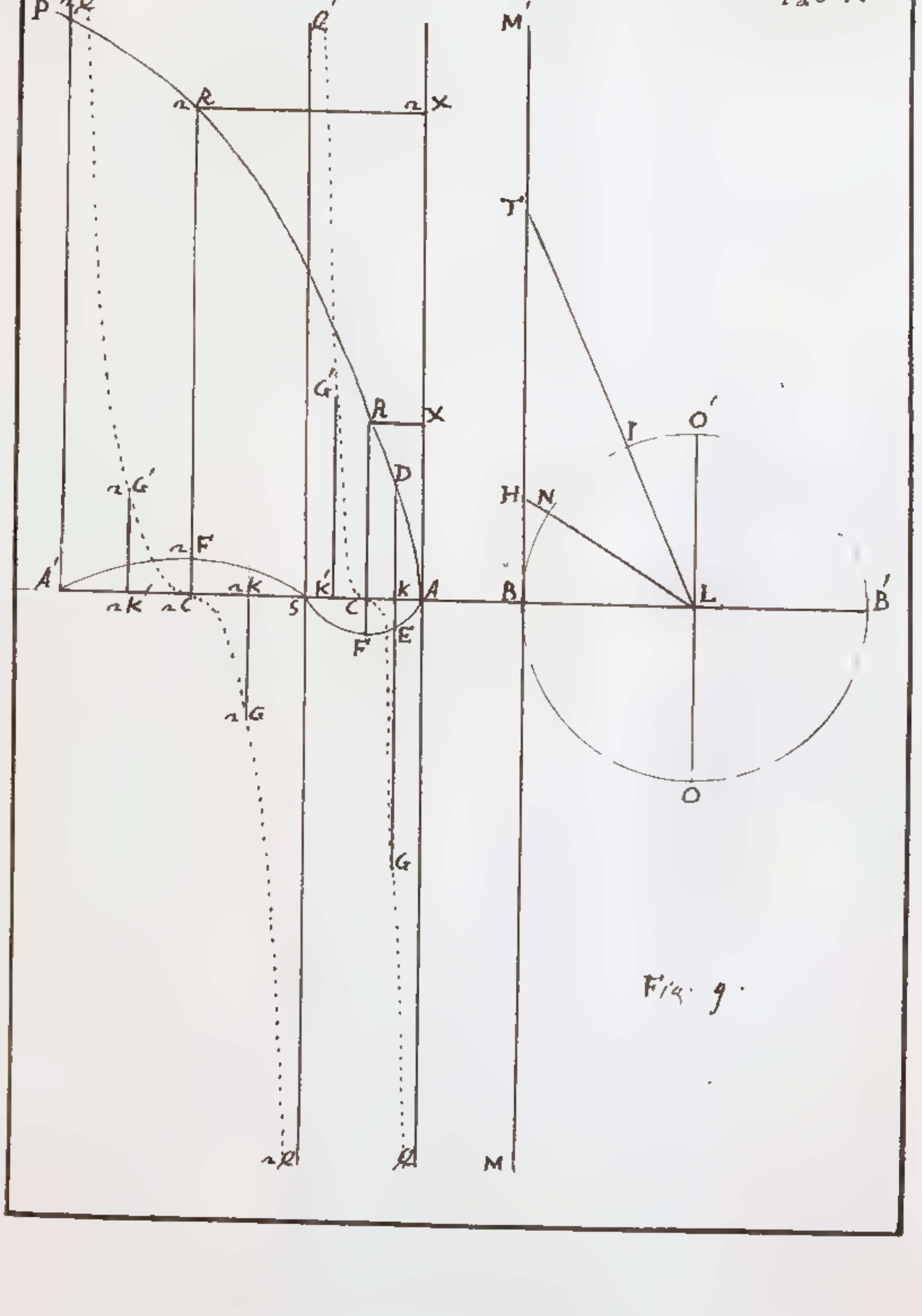
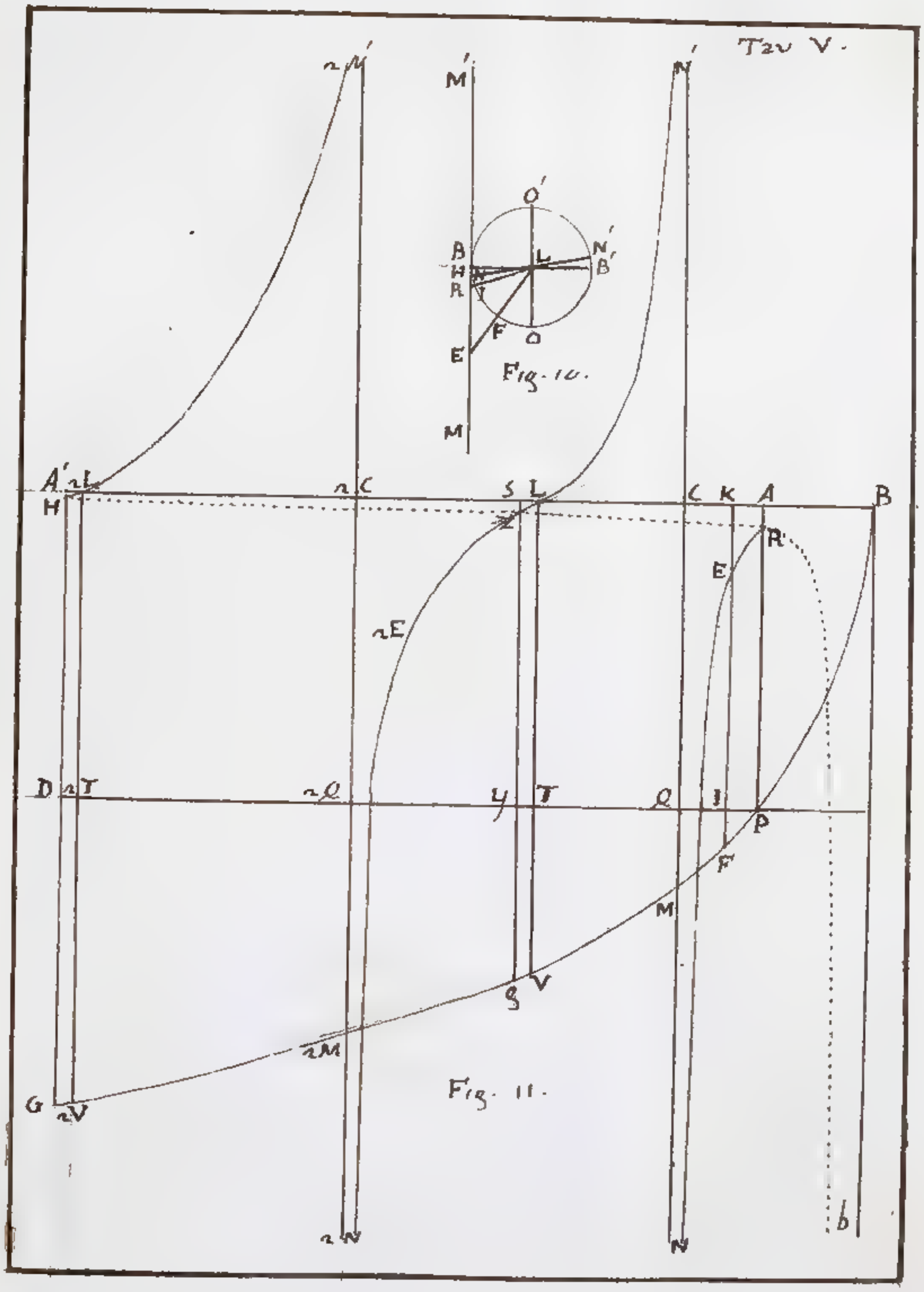


Fig. 9.


Tab V.
Fig. 10.
Fig. 11.

Tav. VI.

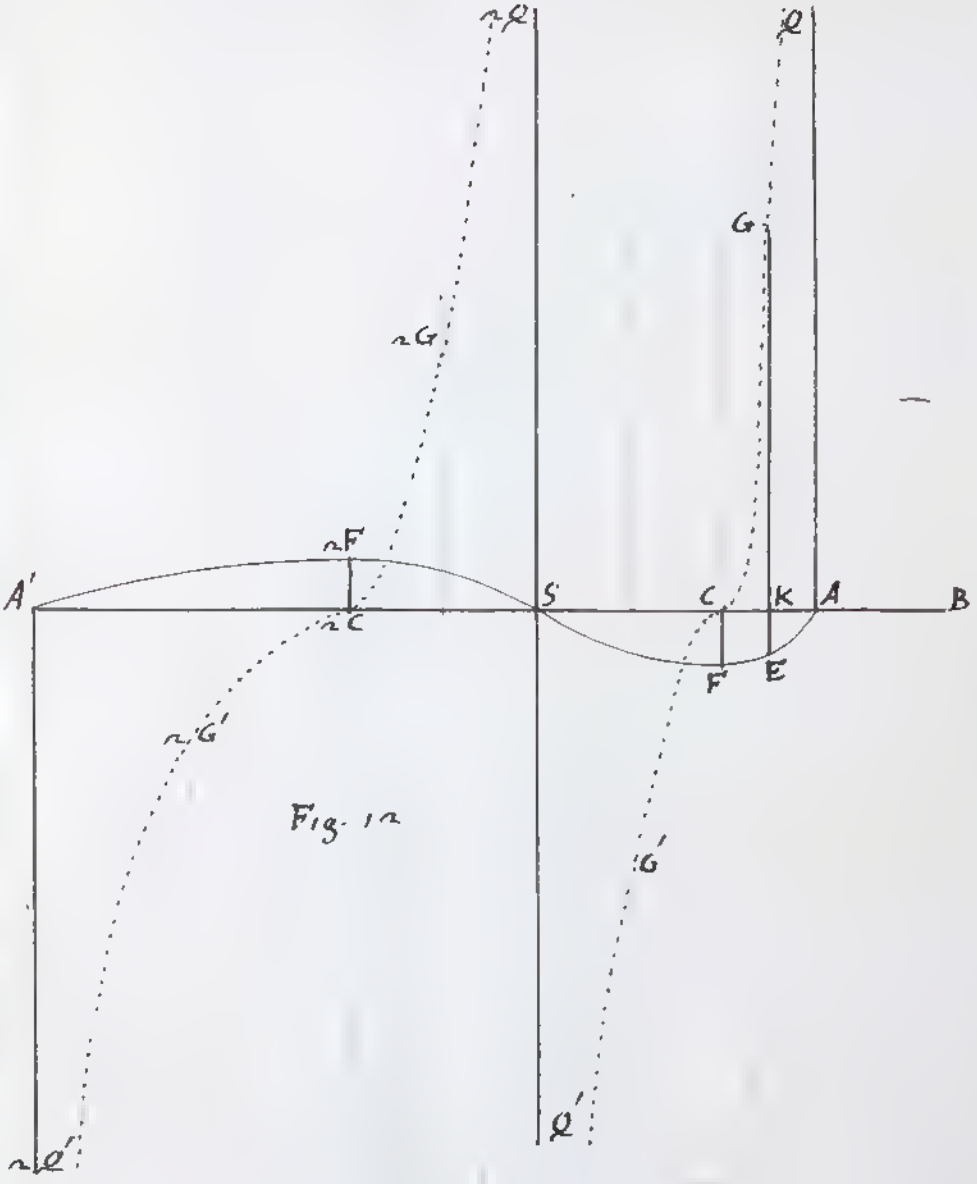


Fig. 12

Fig. 13.

Tav. VII.

Fig. 14.

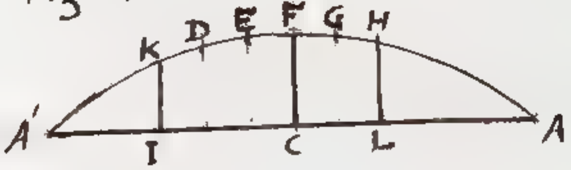


Fig. 15.

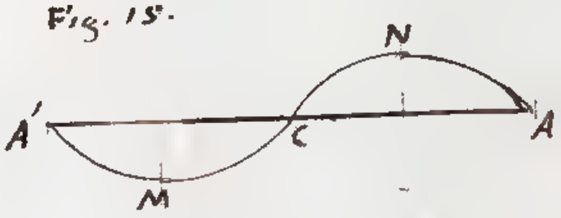


Fig. 16.

Tav. VIII.

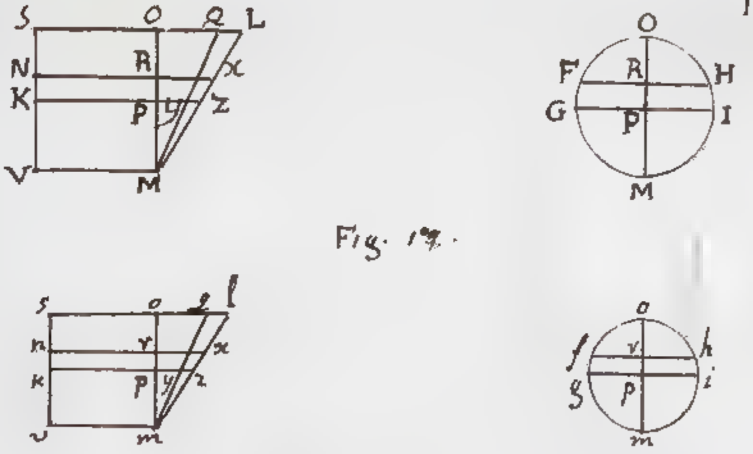


Fig. 17.

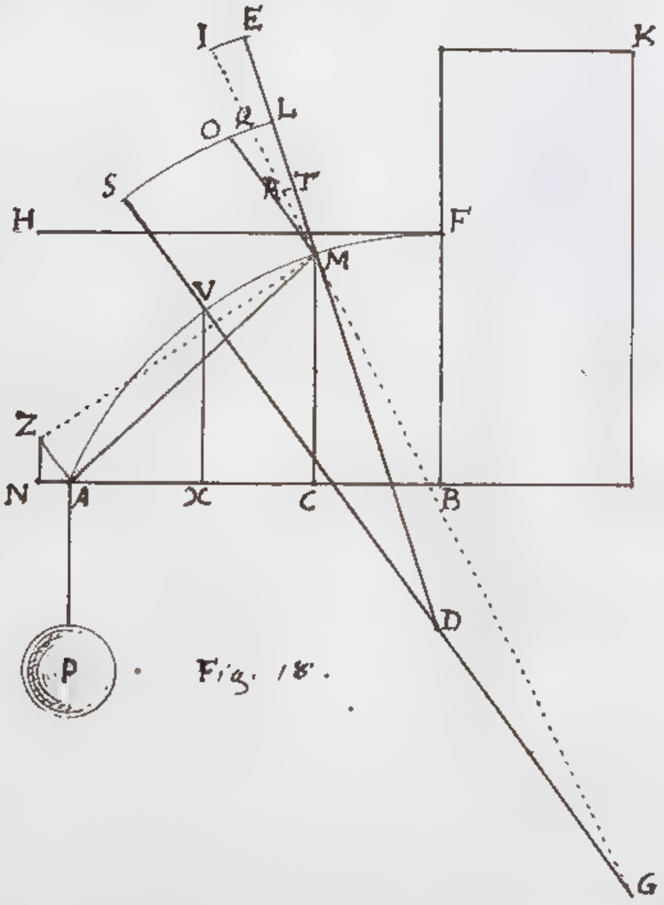


Fig. 18.

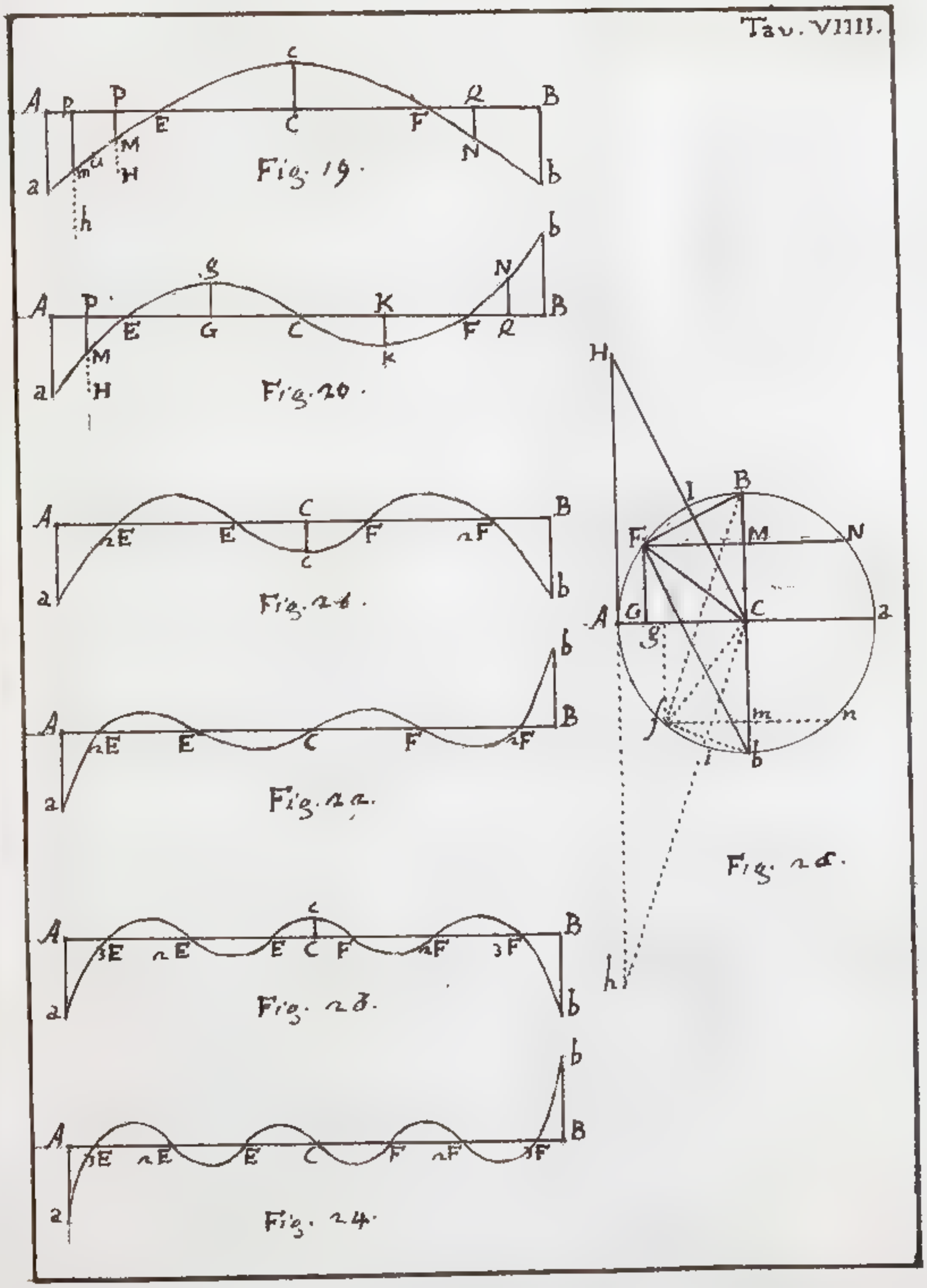


Fig. 19.

Fig. 20.

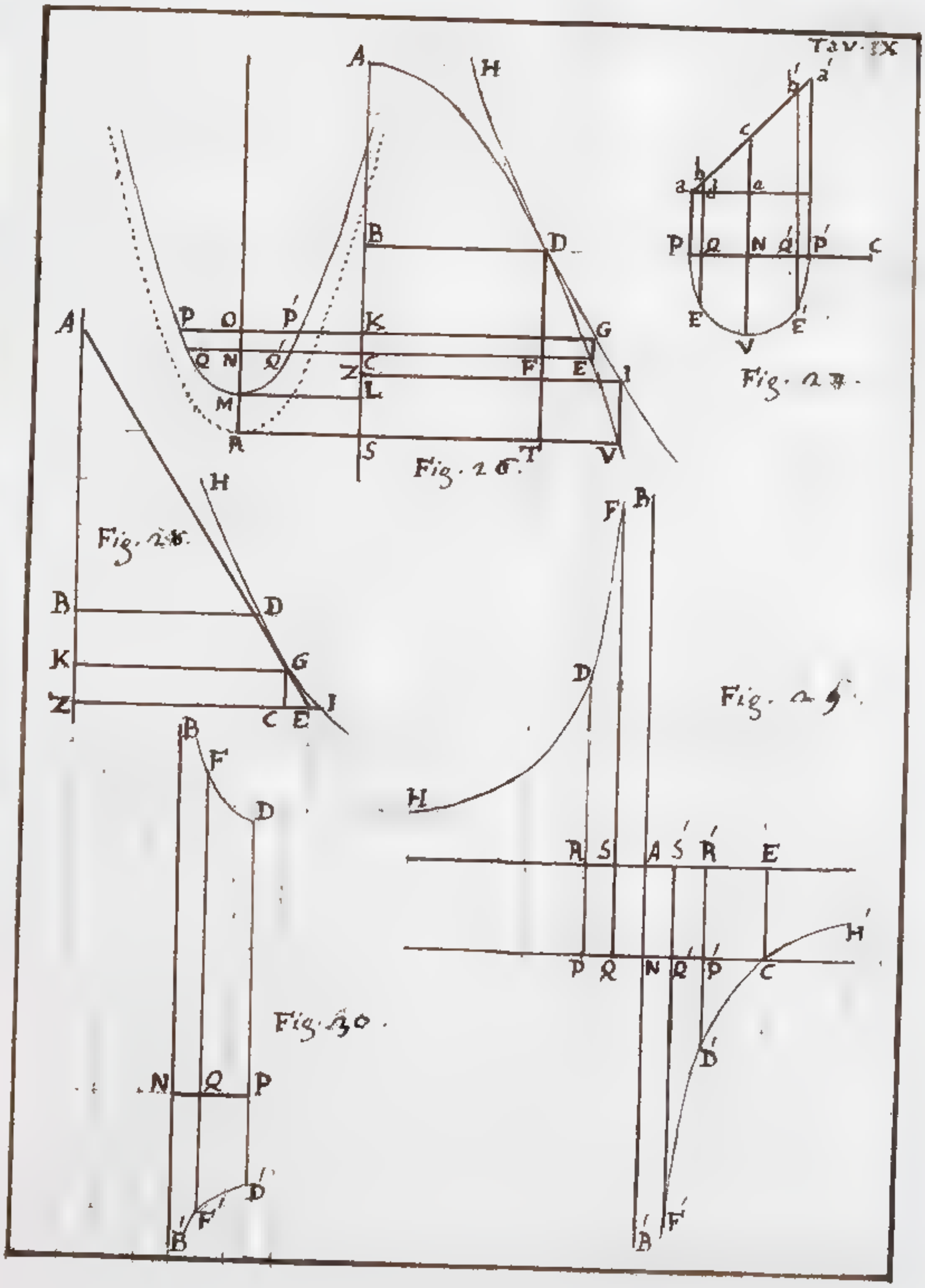
Fig. 21.

Fig. 22.

Fig. 23.

Fig. 24.

Fig. 25.


Tav. IX
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.

Tav. XI

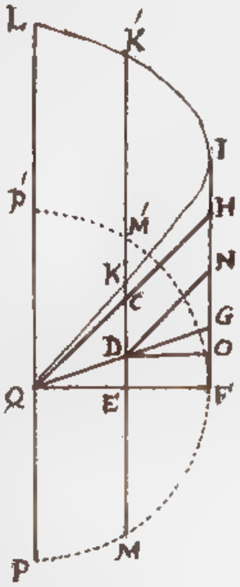


Fig. 36

Fig. 39

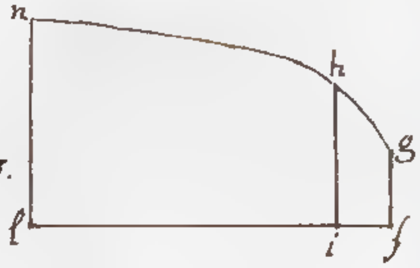


Fig. 38

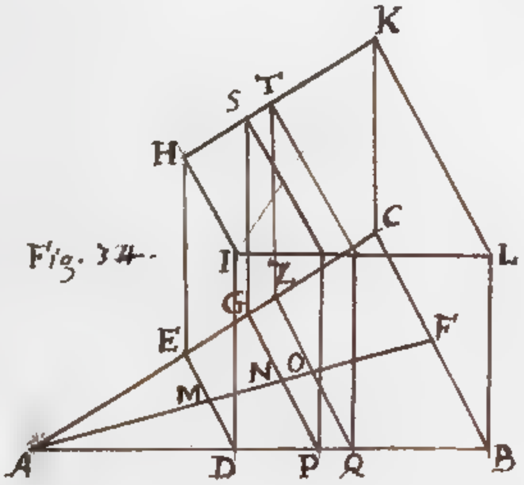


Fig. 37

Tav. XII.

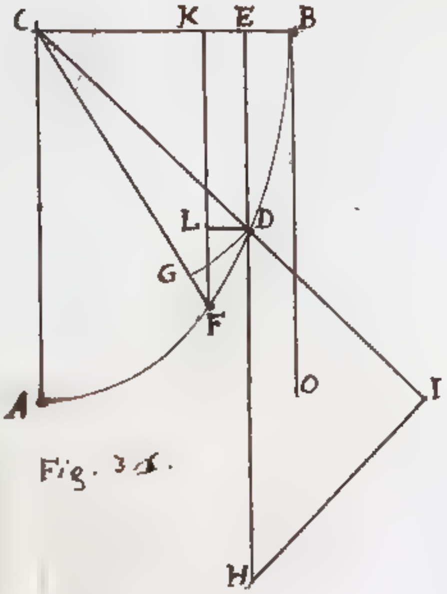


Fig. 35.

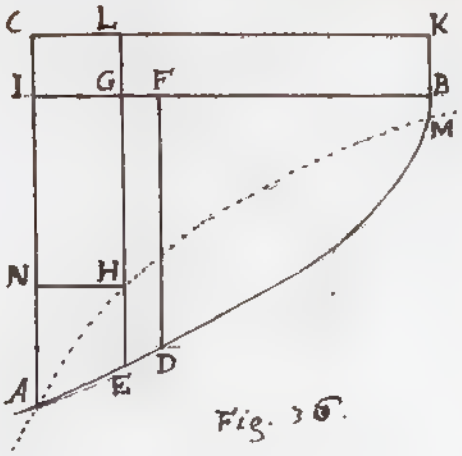


Fig. 36.

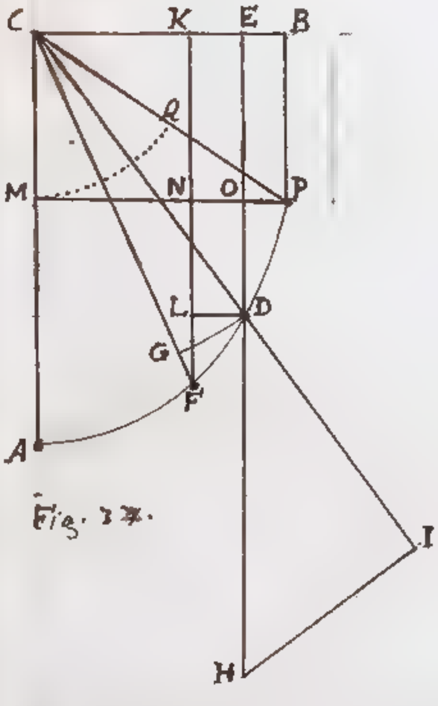


Fig. 37.

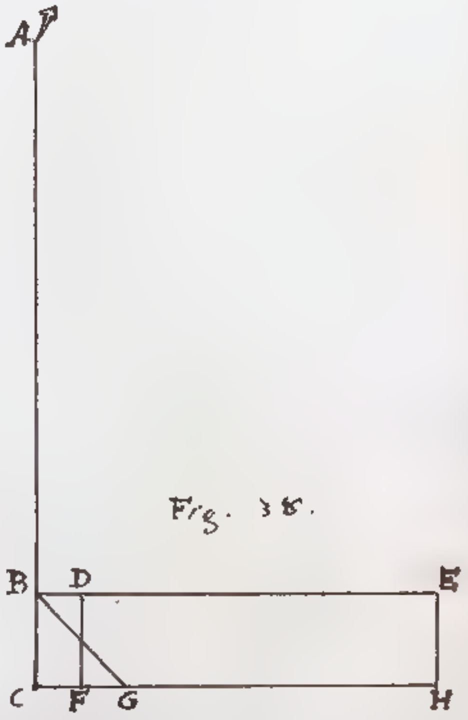


Fig. 38.

B
H

È questa una seconda copia del
volume II dell'Opera di G. Riccati:
Delle corde ovvero fibre elastiche,
già stampata sulla fine del 1700.